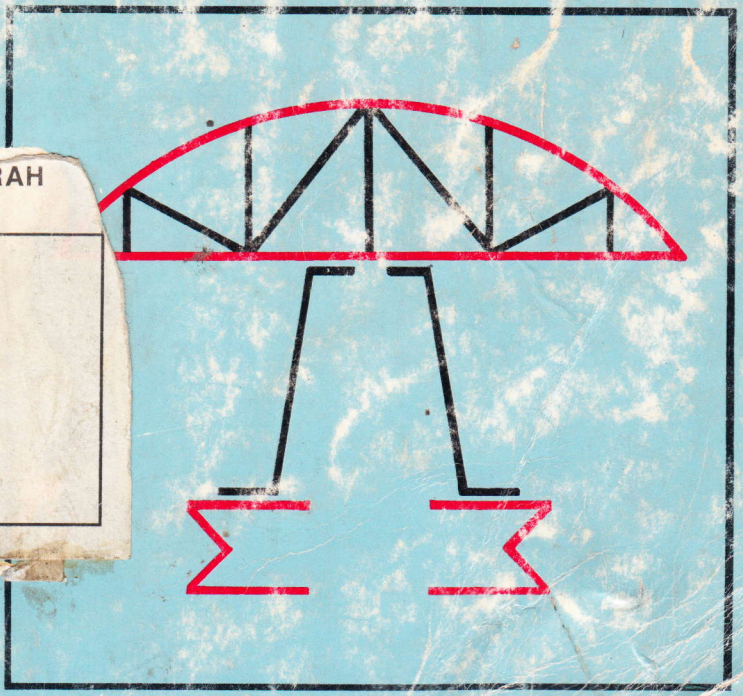
IR. Drs. KUSUMA WIRAWAN
IR. MULJADI NATAPRAWIRA

BUNGA RAMPAI MEKANIKA TEKNIK

I



RAH
TIMUR

Proyek Pembinaan Perpustakaan
Jawa Timur
T. A. 1993 / 1994

Item ID 1000002221

MILIK
PERPUSTAKAAN DAERAH
JAWA TIMUR
Nomor : 69-705 /PD/ C /1994
Tanggal; 24/6 1994

©1984 Penerbit Alumni

Hak Cipta pada Penerbit Alumni dan dilindungi Undang-undang; tidak diperkenankan memperbanyak penerbitan ini dalam bentuk stensil, foto copy atau cara lain tanpa izin tertulis Penerbit Alumni

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

I.B.M. setting, layout, cetak offset
oleh Percetakan Offset Alumni
Kotak Pos 272, Bandung

Anggota IKAPI

BUNGA RAMPAI MEKANIKA TEKNIK I

IR. Drs. KUSUMA WIRAWAN
IR. MULJADI NATAPRAWIRA

PENERBIT ALUMNI / 1984 / BANDUNG
KOTAK POS 272

RIWAYAT SINGKAT PENULIS

KUSUMA WIRAWAN dilahirkan di Jakarta pada tahun 1949. Setelah lulus dari SMA Kanisius Kolese Jakarta (1968), ia melanjutkan studinya di Universitas Katolik Parahyangan jurusan Teknik Sipil (1969) dan di Institut Teknologi Bandung jurusan Matematika (1970). Selama masa studinya, ia bekerja sebagai asisten dosen di ITB, UNPAR dan Universitas Kristen Maranatha Bandung. Selain itu, ia juga mengajar Matematika SMA di Bandung (1976 – 1977). Sejak lulus dari ITB (1977), ia bekerja sebagai dosen pada Departemen Matematika ITB. Tahun 1980 lulus dari UNPAR dan sejak 1981 memperdalam studi di Perancis.

MULJADI NATAPRAWIRA dilahirkan di Cirebon pada tahun 1951. Setelah lulus dari SMA Santa Maria Cirebon (1969), ia melanjutkan studinya di Universitas Katolik Parahyangan jurusan Teknik Sipil (1970). Sejak tahun 1975 ia bekerja sebagai asisten Mekanika Teknik di UNPAR, dan pada tahun 1980 lulus sebagai Sarjana Teknik Sipil.

Dipersembahkan kepada :
Papa & Mama kami
dan
anak-cucunya
serta
B.IR.

*

PRAKATA

Gagasan untuk membuat buku ini timbul dari perenungan kembali tentang : "Apa dan bagaimana mengatasi kekurangan yang umumnya terjadi dalam mempelajari Mekanika Teknik, selama kami belajar, selama kami bekerja sebagai asisten dosen dan sesudah lulus sebagai Sarjana Teknik Sipil".

Beberapa hal tampak jelas bagi kami,

1. Dalam Mekanika Teknik, penguasaan anak tangga yang paling bawah dan anak tangga selanjutnya sangatlah penting artinya; Rapuh pada salah satu anak tangga akan membuat penjenjangan menjadi goyah.

2. Penguasaan teori dengan baik sangat diperlukan untuk dapat "merasakan" dan menafsirkan hasil perhitungan yang diperoleh; Tanpa penguasaan teori niscaya kita akan kehilangan sentuhan masalah yang kita hadapi.

3. Penguasaan matematika yang kurang baik dan adanya kecenderungan untuk menganggap bahwa ilmu teknik tidak memerlukan matematika yang "mendalam" justeru merupakan hambatan terbesar bagi pengembangan dan pemantaban pengetahuan yang ingin dicapai para mahasiswa. Tanpa matematika kita tidak akan bisa menyelam jauh ke dalam ilmu teknik.

Hasil perenungan tersebut tentu akan mewarnai usaha kami yang kecil ini. Di sana-sini, beberapa "cubitan" sengaja kami tampilkan untuk menyadarkan kita bahwa proses sederhana yang biasanya singkat dan "jelas" sebenarnya perlu dikaji lebih teliti.

Seluruh konsep mekanika teknik yang terdapat di dalam buku ini bukanlah hasil pohon yang kami tanam sendiri; Kami hanyalah perangkai, dan karenanya pantaslah ucapan terima kasih kami sampaikan kepada petani-petani terhormat dan guru-guru kami.

Apabila buku ini bisa ikut melengkapi sarana belajar anda, senanglah kami, apalagi jika diimbuhi sarana perbaikannya. Dan, apabila Tuhan mengijinkan, lanjutan Bunga Rampai Mekanika Teknik akan kami susulkan.

Bandung, Juli 1983

Kusuma Wirawan
Muljadi Nataprawira

***

DAFTAR ISI

PRAKATA ... v

BAB I PERUBAHAN BENTUK DAN TEGANGAN AKIBAT GAYA AKSIAL 1
- 1.1. Pengantar 1
- 1.2. Gaya Dalam dan Tegangan akibat Gaya Aksial 4
- 1.3. Keelastisan 9
- 1.4. Pipa Berdinding Tipis 50
- 1.5. Angka Pembanding Poisson 58

BAB II GAYA DALAM 69
- 2.1. Sifat-sifat Tumpuan 70
- 2.2. Kesetimbangan Raga Lepas 76
- 2.3. Penjanjian Tanda 82
- 2.4. Diagram Momen Lentur, Gaya Lintang dan Gaya Aksial 88
- 2.5. Hubungan Matematikal antara q (x), Q (x) dan M (x) 95
- 2.6. Bangunan Tiga Sendi 131

BAB III KABEL 167
- 3.1. Kabel dengan Beban Terpusat 167
- 3.2. Kabel dengan Beban Terbagi Rata Sepanjang Garis Horisontal 186
- 3.3. Catenary (Rantai) 202

BAB IV MOMEN INERSIA 217
- 4.1. Definisi 220
- 4.2. Perhitungan Momen Inersia Penampang Baku 223
- 4.3. Momen Inersia Ekstrim 238
- 4.4. Elips Inersia 244

BAB V TEGANGAN DI DALAM BALOK 257
- 5.1. Tegangan pada Balok Akibat Momen Lentur 257

5.2. Balok Paduan 286
5.3. Balok Beton Bertulang 295
5.4. Pengaruh Bentuk Penampang Balok . 302
5.5. Tegangan Akibat Gaya Lintang 313
BAB VI LENDUTAN BALOK AKIBAT MOMEN LENTUR 331
6.1. Cara Integral Lipat Dua 332
6.2. Cara bidang Momen 363
6.3. Cara Balok Sekawan 384
INDEKS 410

***

BAB I

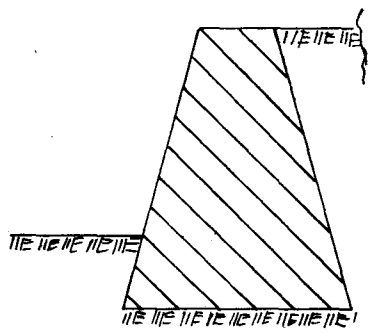
PERUBAHAN BENTUK DAN TEGANGAN AKIBAT GAYA AKSIAL

1.1. Pengantar.

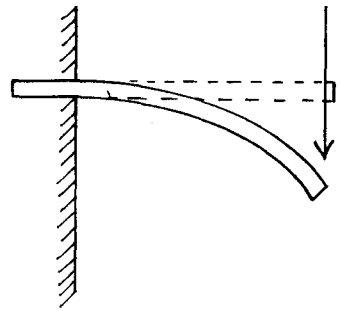
Dalam bangunan teknik sipil, ada tiga masalah utama yang harus selalu kita perhatikan, yakni kestabilan, perubahan bentuk dan kekokohannya.

Apabila kedudukan suatu bangunan dapat berubah, kita katakan bangunan tersebut tidak stabil. Sebagai contoh, apabila tembok penahan tanah dalam gambar 1.1.1. dapat tergeser atau terguling, kita katakan tembok tersebut tidak stabil.

Sebaliknya, balok dalam gambar 1.1.2. tidak berubah kedudukannya dan oleh karena itu kita katakan balok tersebut stabil, tetapi telah terjadi perubahan bentuk pada balok tersebut, balok yang tadinya lurus menjadi melengkung akibat beban yang dipikulnya.



gambar 1.1.1.



gambar 1.1.2.

Bagian suatu bangunan tidak boleh hancur, putus mau pun patah, ia harus kokoh tentu saja. Kokoh tidaknya

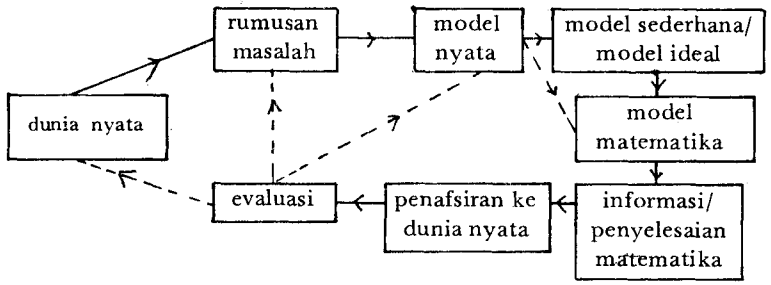
suatu bangunan ditentukan oleh sifat bangunan itu sendiri (baik cara bangunan itu disusun mau pun bahan bangunan yang dipakainya), dan oleh apa yang dialami setiap bagian bangunan tersebut, yakni berapa besar momen lentur, momen torsi, gaya lintang dan gaya normal yang diderita setiap penampangnya.

Dalam peninjauan ketiga masalah tersebut di atas, proses percobaan, pemodelan, penyederhanaan dan pengandaian tidak dapat dihindarkan. Karena dalam kenyataan, setiap masalah yang akan kita bahas nanti pada mulanya merupakan hal yang tidak terumuskan secara baik. Dari gejala alam yang ingin kita telaah, selalu harus kita rumuskan dulu permasalahannya secara jelas dan lengkap, besaran atau data apa saja yang terlibat, hukum apa saja yang berlaku dan sebagainya. Setelah itu, kita buat model nyatanya, kemudian penyederhanaan dan pengandaian jika diperlukan. Apabila model tersebut sudah cukup memuaskan, keterangan yang diperlukan dapat kita gali, secara langsung jika hal itu memungkinkan, atau apabila model matematika yang diperoleh, penggalian keterangan kita lakukan dengan matematika, tentu saja.

Selanjutnya, hasil yang kita peroleh masih perlu dinilai, memuaskan atau tidak, cukup sesuai dengan kenyataan atau tidak. Tentu akan terjadi penyimpangan, tetapi seberapa jauh simpangan tersebut ? Jika simpangannya cukup besar maka perumusan, pemodelan dan/atau cara penggalian keterangan harus diperbaiki, demikian seterusnya hingga hasil yang memuaskan kita peroleh.

Dalam bentuk diagram, proses tersebut dapat digambarkan seperti berikut (gambar 1.1.3.) * :

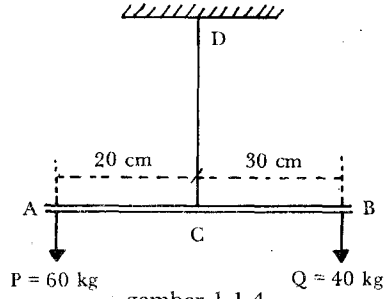
* Dikutip dari "Persamaan Diferensial sebagai Model Matematika", DR. M. Ansyar, Konperensi Matematika Nasional III, 1979, Surabaya.



gambar 1.1.3.

Setiap langkah yang kita tempuh dalam proses tersebut di atas perlu kita sadari betul, agar segala penyimpangan yang terjadi dapat kita telusuri sebabnya, dan penyimpangan yang tidak perlu pun dapat kita hindari. Lihatlah contoh berikut :

Dalam kebiasaan berhitung kita, hampir secara otomatis kita hitung bahwa kawat CD dalam gambar 1.1.4. menderita gaya vertikal 100 kg. Padahal, perhitungan kita tidak tepat, karena dalam kenyataannya, walaupun mungkin hanya sedikit, balok AB tentu akan melendut sehingga jarak antara beban P dengan beban Q tidak lagi sama dengan jarak semula, lebih kecil tentunya, dan lagi pula, balok AB bukanlah garis lurus, ia punya penampang dan berat bukan ?



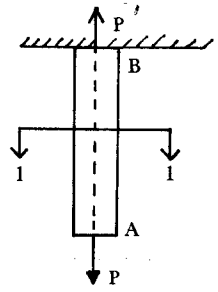
gambar 1.1.4.

Nah, apabila anda tanya : "Lalu, bagaimana ?", itu suatu pertanda baik. Setidaknya, adanya simpangan dalam hitungan di atas sudah disadari, selanjutnya tinggal perkara bisa diterima atau tidaknya simpangan tersebut. Apabila perhitungan di atas tetap dipertahankan, berarti kita telah melakukan penyederhanaan, balok AB kita andaikan bersifat kaku sehingga lendutan yang terjadi kita abaikan, berat balok kita andaikan jauh lebih ringan daripada beban-beban yang harus dipikulnya, dan ukuran penampangnya jauh lebih kecil daripada panjangnya. Kalau keadaan nyatanya sesuai dengan anggapan kita, bolehlah hasil tersebut kita terima. Tetapi, hal yang sama tentu tidak dapat kita lakukan apabila, misalnya, luas penampang balok 0,5 m^2 sedangkan bebannya masing-masing 0,6 kg dan 0,4 kg, karena simpangan yang dikandungnya akan cukup besar, dan lebih lanjut, penyimpangan yang tidak perlu dapat kita hindari dengan memperhitungkan berat balok yang bersangkutan (demi kesetabilan, titik berat balok kita andaikan di titik C).

Contoh sederhana di atas kiranya dapat menggambarkan pentingnya pemahaman setiap langkah yang kita lakukan dalam menyelesaikan masalah yang akan kita bahas dalam buku ini, sehingga penerapan teori yang disajikan tidak dilakukan secara "pukul-rata". Dengan kata lain, keadaan nyata di lapangan kelak harus selalu dipertimbangkan.

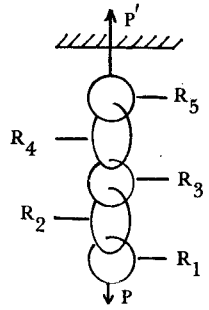
1.2. Gaya Dalam dan Tegangan akibat Gaya Aksial.

Tinjaulah suatu batang prismatik (penampang-penampangnya yang tegak lurus sumbunya, sama dan sebangun) yang dibebani gaya, sebutlah P, *pada sumbunya* (gambar 1.2.1.).



gambar 1.2.1.

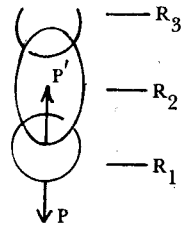
Jika batang tersebut diam, tentu harus ada gaya lain, katakanlah P', sebagai reaksi yang mengimbangi gaya P (Abaikanlah dulu berat batangnya). Reaksi P' tentu saja diberikan oleh benda tempat batang tersebut digantung. Hal yang gamblang itu menjadi sedikit rumit jika kita ingin tahu juga bagaimana reaksi itu timbul, padahal gaya P tidaklah langsung bekerja di gantungan itu. Dan apa yang terjadi di dalam batang tersebut ?



gambar 1.2.2.

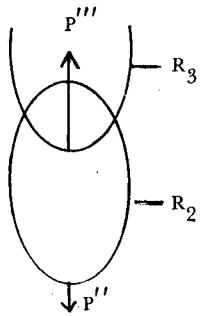
Kejadian serupa bisa lebih menjelaskan bagaimana menjalarnya gaya P sehingga menimbulkan reaksi di gantungan batang AB pada gambar 1.2.1. Gantilah batang dengan rantai (gambar 1.2.2.), dan telusurilah kejadian-kejadian mulai dari mata rantai yang paling bawah, yakni R_1.

Jika rantai tersebut tidak putus (diam), pada mata rantai R_1 akan terjadi hal berikut (gambar 1.2.3) : Akibat beban P, R_1 akan jatuh apabila tidak ada R_2 yang memberikan reaksi P' terhadapnya. Aksi P pada R_1 diimbangi oleh reaksi P', yang dilakukan oleh R_2 pada R_1. Dan R_1 yang tadinya tidak mengalami gaya ke atas sekarang mengalami "aksi" P' yang dilakukan oleh R_2. Oleh karena itu, sebagai reaksi atas P', R_1 melakukan gaya P".



gambar 1.2.3.

ke bawah terhadap R_2 (gambar 1.2.4).

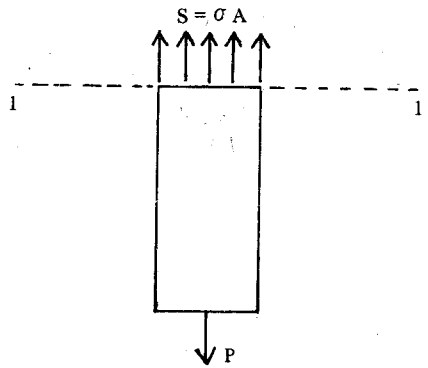


gambar 1.2.4

Sekarang R_2 mengalami gaya P'' ke bawah, dan R_2 tentu akan jatuh ke bawah jika tidak ada R_3 yang mengimbanginya dengan P'''. Begitulah, apa yang terjadi pada R_1 terjadi juga pada R_2, R_2 menderita aksi P''' yang dilakukan oleh R_3, sebagai reaksi, R_2 juga akan menarik R_3 ke bawah dengan P'''', dan seterusnya sehingga menjalarlah gaya P sampai pada mata rantai yang teratas, yang berhubungan langsung dengan benda tempat rantai tersebut digantung.

Kejadian serupa juga terjadi pada batang AB (gambar 1.2.1), setiap partikel pada batang tersebut mengalami kejadian yang serupa dengan mata rantai yang baru saja dibicarakan. Atinya, terjadi suatu rentetan aksi-reaksi pada partikel-partikel batang tersebut; dan rentetan aksi-reaksi tersebut dinamakan *Gaya-gaya dalam.*

Sekarang, bayangkanlah apa yang terjadi apabila batang AB kita "potong" tegak lurus sumbunya dan kita perhatikan penampangnya, sebutlah penampang 1-1 (gambar 1.2.5). Tidak seperti pada rantai yang aksi-reaksinya dapat dilokalisasikan, pada batang yang kita tinjau ini setiap partikelnya akan mengalami kejadian aksi-reaksi, sehingga tidaklah bijaksana untuk memandang gaya reaksi yang bekerja pada penampang 1-1 hanya terdiri dari satu gaya saja. Untuk itu kita perlu memakai konsep intensititas gaya (gaya per satuan luas) yang kita namakan *tegangan (ingatlah konsep* tekanan pada gas atau cairan).



gambar 1.2.5

Jika batang AB terbuat dari bahan sejenis (homogen), bolehlah kita andaikan bahwa gaya reaksi pada penampang 1-1 *terbagi rata**. Misalkan gaya reaksi terhadap P adalah S, dan luas penampang 1-1 adalah A, maka intensitas gaya atau *tegangan* di setiap titik pada penampang tersebut adalah $\sigma = S/A$; Dan karena potongan batang tersebut seimbang, tentulah S = P, sehingga kita peroleh :

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad (1.2.1)$$

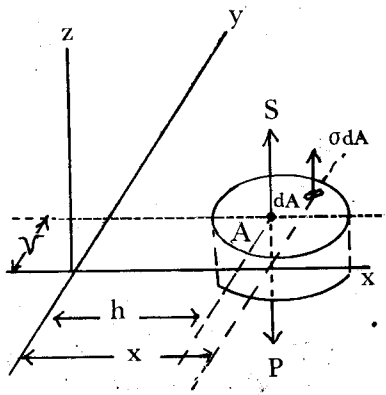
Selanjutnya marilah kita lihat akibat pengandaian bahwa reaksi S terbagi rata pada penampang 1-1.

Pada elemen kecil penampang dA tentu timbul gaya sebesar σdA, yang arahnya sesuai dengan S, yakni tegak lurus penampang 1-1. Jika kita jumlahkan gaya-gaya tersebut tentu akan kita peroleh gaya S sebagai resultantnya karena

$$\int_A \sigma dA = \sigma A = S \qquad (1.2.2)$$

* Pada penampang dekat ujung batang, tegangannya tidak dapat dianggap merata.

Kemudian, berdasarkan pandangan bahwa S adalah resultan gaya-gaya σdA, tentulah momen gaya S terhadap titik sembarang pada penampang 1-1 sama dengan jumlah momen gaya σdA terhadap titik yang sama (gambar 1.2.6).



Buatlah koordinat Cartesian pada penampang 1-1 dan misalkan S bekerja di titik (h,v), maka :

$$h\,S = \int_A x\,\sigma\,dA$$

$$= \sigma \int_A x\,dA \qquad (1.2.3).$$

tapi $S = \sigma A$ (persamaan [1.2.2]), sehingga :

$$h = \frac{\int_A x\,dA}{A} \qquad (1.2.4)$$

Dengan cara yang sama juga kita peroleh :

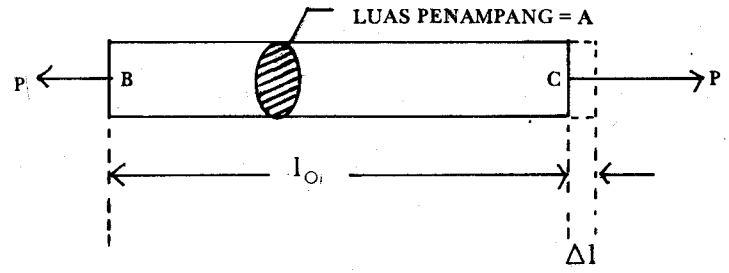
$$v = \frac{\int_A y\,dA}{A} \qquad (1.2.5)$$

Jadi, letak garis kerja resultan gaya-gaya σdA ternyata di titik berat penampang 1-1, sehingga agar potongan batang yang kita tinjau berada dalam keadaan seimbang, tentulah garis kerja P juga harus melalui titik berat penampang 1-1. Alhasil, dapatlah kita simpulkan bahwa tegangan pada penampang batang akan seragam hanya jika gaya P bekerja di titik berat penampang batang yang bersangkutan. Jika gaya P bekerja tidak pada titik berat penampang batang AB, maka tegangan yang terjadi tidaklah merata, tetapi kita tangguhkan dulu pembicaraan mengenai kasus tersebut demi kelancaran pembahasan.

Gejala serupa akan terjadi juga jika beban P bekerja dalam arah sebaliknya; batang AB akan tertekan dan tegangan yang terjadi juga bersifat sebaliknya, menekan.

1.3 Keelastisan.

Gejala lain yang perlu kita amati dari kejadian pada gambar 1.2.1 adalah mulurnya batang akibat gaya P. Dari percobaan-percobaan yang dilakukan, batang-batang dari bahan yang berbeda jika ditarik dengan gaya P ternyata memiliki keserupaan dalam hal-hal berikut : (lihat gambar 1.3.1)



gambar 1.3.1

- Jika gaya P diperbesar sedikit demi sedikit, batang BC juga bertambah panjang sebanding dengan besarnya gaya P yang diberikan. Selanjutnya jika gaya P dikurangi sedikit demi sedikit, tambahan panjangnya juga akan berkurang perlahan-lahan. Dan jika setelah beban P dihilangkan ternyata panjang batang kembali sama seperti panjang semula, kita katakan batang tersebut bersifat elastis sempurna; jika tidak demikian, kita katakan batang tersebut tidak elastis sempurna atau elastis sebagian. Umumnya bahan-bahan yang dipakai dalam bangunan teknik sipil boleh dikatakan bersifat hampir elastis sempurna, asalkan gaya P tidak melampaui batas tertentu yang kita sebut batas keelastisan (lihat diagram $\sigma-\epsilon$ dalam gambar 1.3.2)

- Pertambahan panjang batang akibat gaya P ternyata berbanding terbalik dengan luas penampang batang

yang bersangkutan, dan berbanding lurus dengan panjang batang semula.

Fakta di atas dirumuskan oleh Sir Robert Hooke dalam rumus yang kita kenal dengan nama Hukum Hooke :

$$\Delta l = \frac{P\, l_o}{E\, A} \qquad (1.3.1)$$

dengan : Δl = tambahan panjang batang akibat gaya tarik P.
E = modulus keelastisan bahan batang.
A = luas penampang batang.
l_o = panjang batang semula sebelum P dikerjakan.

Rumus (1.3.1) biasanya ditulis dalam bentuk yang lebih singkat, yakni

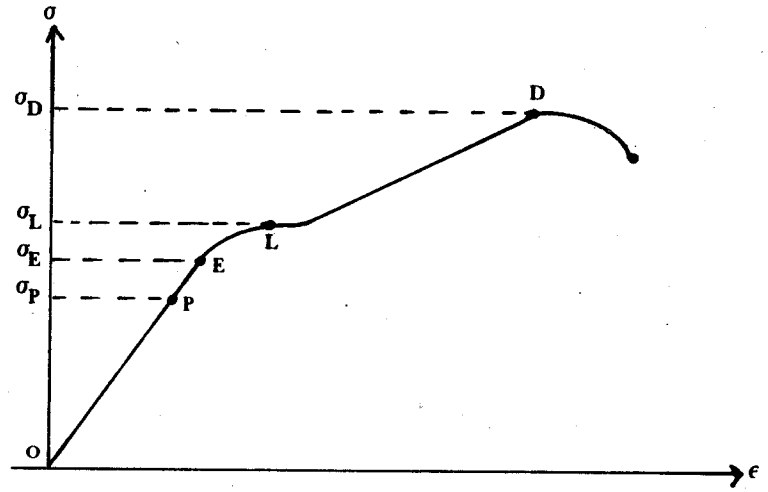
$$\sigma = E\, \epsilon \qquad (1.3.2)$$

dengan : σ = P/A, tegangan
ϵ = $\Delta l/l_o$, dikenal dengan nama STRAIN.

Besaran ϵ atau strain ini menunjukkan perobahan panjang per satuan panjang dan tidak berdimensi. Kelak, besaran strain inilah yang akan sering kita jumpai, karena ia bersifat lebih umum, tidak bergantung pada ukuran bendanya. Sekali kita tahu ϵ, Δl selalu dapat dicari, jika l diketahui.

Selanjutnya marilah kita lihat apa yang akan terjadi pada batang BC apabila gaya tarik P diperbesar terus sehingga akhirnya batang tersebut menjadi putus.

Suatu cara umum untuk menggambarkan prilaku suatu bahan bangunan yang memikul gaya tarik (gaya tekan) adalah dengan diagram $\sigma-\epsilon$ Sebagai contoh lihatlah diagram $\sigma-\epsilon$ untuk baja pada gambar 1.3.2 di bawah ini.



gambar 1.3.2

$0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_p$, garis lurus OP :

Selama σ berada dalam batas-batas ini, perbandingan σ/ϵ tetap nilainya dan sama dengan E, modulus keelastisan bahan. σ_p kita sebut Batas Proporsional.

$\sigma_p < \sigma \leqslant \sigma_E$, garis lengkung PE :

Selama σ berada dalam batas-batas ini, perbandingan σ/ϵ tidak tetap lagi nilainya, $d\sigma/d\epsilon < E$, tetapi bahan masih bersifat elastis, artinya jika gaya P kita hilangkan perlahan-lahan, Δ l akan lenyap sama sekali, panjang batang akan kembali seperti panjang semula. Oleh karena itu σ_E, kita sebut Batas Elastis.

Catatan : Penentuan σ_E secara tepat sukar, karena untuk menguji apakah batang masih elastis kita mesti menghilangkan gayanya. Ini juga membawa akibat

sukarnya penentuan beda antara batas elastis dan batas proporsi. Walaupun kita tahu bahwa $\sigma_p \leqslant \sigma_E$, umumnya orang suka membaurkan pengertian σ_p dengan σ_E, dan kadang-kadang menganggap $\sigma_P = \sigma_E$.

$\sigma_E < \sigma \leqslant \sigma_L$, garis lengkung EL :

Apabila σ berada dalam batas-batas ini, bahan tidak elastis lagi. Artinya, jika gaya P dihilangkan perlahan-lahan panjang batang AB tidak lagi kembali ke panjang semula. Sejak $\sigma = \sigma_L$, batang mulai meluluh; Walaupun P tidak diperbesar $\in$ akan bertambah besar. Batas ini kita sebut Batas Luluh.

Catatan :
- Dalam keadaan luluh, penciutan penampang di tempat meluluhnya batang akan besar sekali, sehingga σ juga akan membesar. Namun untuk menentukan batas luluh σ_L, kita tetap mempergunakan luas penampang batang semula sebelum gaya P dikerjakan, demikian pula dalam menghitung besar σ selama percobaan.
- Batas luluh inilah yang dijadikan patokan dalam Rancangan Batas (Ultimate Design). Tegangan batas yang diijinkan didefinisikan sama dengan $(1/n)\,\sigma_L$, n (> 1) kita sebut Faktor Keamanan.

Diagram σ—ϵ juga dipakai untuk menggambarkan prilaku batang yang mengalami gaya tekan, dan umumnya sangat serupa dengan diagram σ—ϵ untuk batang yang mengalami gaya tarik, kecuali bahwa tegangan luluh akibat gaya tarik dan penampang di tempat terjadinya peluluhan tidak mengalami penciutan melainkan pembesaran.

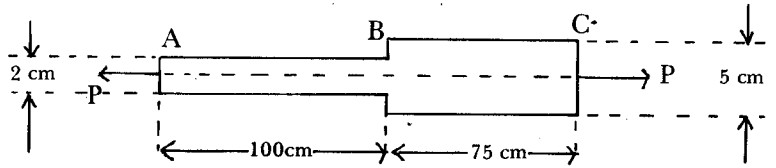
Baiklah, telah kita dapatkan gambaran kasar tentang prilaku bahan yang mengalami tegangan tarik (tekan). Selanjutnya, kita catat bahwa fase pertama yang akan dialami

setiap bahan bangunan teknik sipil adalah fase elastis dan berlakunya hukum Hooke. Dan hukum Hooke menyatakan hubungan antara σ dan ϵ dalam rumus yang manis dan sederhana, linier! Parameter yang menentukannya juga hanya modulus keelastisan E. Lebih jauh lagi, percobaan-percobaan di laboratorium menunjukkan bahwa baja, kayu, aluminium dan kuningan bersifat elastis hampir sempurna dan dapat diandaikan mengikuti Hukum Hooke asalkan tegangannya tidak melampaui batas keelastisannya, tentu saja! Oleh karena itu, alasan pengandaian berikut benar-benar bak ayam putih terbang siang.

Semua bahan yang dibicarakan selanjutnya dalam buku ini diandaikan mengikuti Hukum Hooke !

Contoh 1.3.A :

Sebuah batang besi silindrikal terdiri dari : Bagian AB, garis tengah penampangnya 2 cm dan panjangnya 100 cm. Bagian BC, garis tengah penampangnya 5 cm dan panjangnya 75 cm. Berapakah tambahan panjang batang ABC dan berapakah tegangan pada batang tersebut jika pada kedua ujungnya diberi gaya tarik P sebesar 1 ton. E besi = $2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2. Abaikanlah berat batang.



gambar 1.3.A.1

Solusi :

Dengan rumus (1.3.1) kita peroleh :

Tambahan panjang pada bagian AB,

$$\delta_1 = \frac{(1000)(100)}{(2{,}1)\,(10^6)\,\frac{1}{4}\pi\,(2)^2}\ \text{cm} = 0{,}015\ \text{cm}$$

Tambahan panjang pada bagian BC,

$$\delta_2 = \frac{(1000)(75)}{(2{,}1)(10^6)\,\frac{1}{4}\,\pi\,(5)^2}\ \text{cm} = 0{,}002\ \text{cm}$$

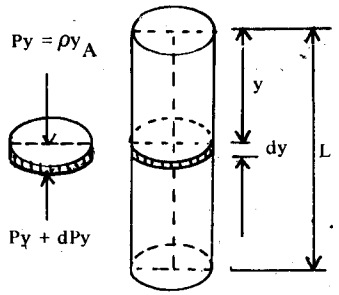
Jumlah tambahan panjang batang ABC = $\delta_1 + \delta_2$ = 0,017 cm

Tegangan pada bagian AB, $\sigma_1 = \frac{1000}{\frac{1}{4}\pi\,(2)^2} = 318{,}310\ \text{kg/cm}^2$

Tegangan pada bagian BC, $\sigma_2 = \frac{1000}{\frac{1}{4}\pi(5)^2} = 50{,}930\ \text{kg/cm}^2$

Contoh 1.3.B :

Tiang beton berbentuk silinder, tingginya 300 cm dan garis tengah penampangnya 30 cm, berat jenisnya 2400 kg/cm^3 serta modulus keelastisannya 1,4 x 10^5 kg/cm^2. Jika beton tersebut diletakkan di atas landasan yang kokoh, berapakah kurangan panjang yang terjadi akibat beratnya sendiri ? Berapa tegangan maksimum yang terjadi pada beton tersebut ?



dPy = berat unsur setebal dy

gambar 1.3.B.1

Solusi :

Tinjau unsur tiang setebal dy sejauh y dari tepi atasnya (gambar 1.3.B.1). Unsur tersebut mengalami gaya tekan sebesar berat bagian tiang di atasnya, yakni :

$P_y = \rho\ y\ A$ (1.3.B.1)

dengan :

ρ = berat jenis tiang

A = luas penampang tiang.

Unsur tiang setebal dy akan mengalami perpendekan sebesar :

$$d\delta = \frac{\rho\ y\ A\ dy}{E\ A} = \frac{\rho\ y\ dy}{E} \qquad (1.3.B.2)$$

sehingga seluruh tiang tersebut akan mengalami perpendekan sebesar :

$$\delta = \int_0^L \frac{\rho\ y\ dy}{E} = \frac{\rho\ L^2}{2E} \qquad (1.3.B.3)$$

dengan : L = tinggi tiang

E = modulus keelastisan tiang

ρ = berat jenis tiang.

Tegangan yang timbul pada penampang yang berjarak y dari tepi atasnya dapat dihitung berdasarkan (1.3.B.1), yakni :

$$\sigma_y = \frac{P_y}{A} = \rho\ y \qquad (1.3.B.4)$$

Dengan memasukkan besaran yang diberikan ke dalam (1.3.B.4) dan (1.3.B.3) kita peroleh (E = 1,4 x 10^8 g/cm^2 dan ρ = 2,4 g/cm^3);

Kurangan panjang tiang,

$$\delta = \frac{(2{,}4)\ (300)^2}{2(1{,}4)(10^8)}\ \text{cm} = 7{,}714 \times 10^{-4}\ \text{cm}$$

Tegangan maksimum terjadi pada dasar tiang (y = 300 cm), maksimum = 2,4 x 300 g/cm^2 = 0,72 kg/cm^2

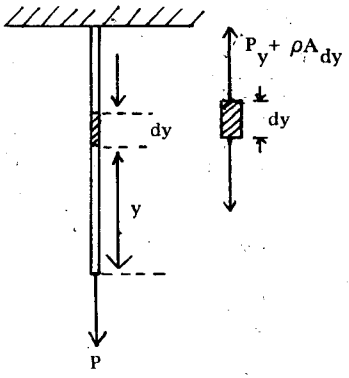
Catatan : — Umumnya perubahan panjang akibat berat sendiri sangat kecil dibandingkan dengan perubahan panjang akibat beban luar, oleh karena itu umumnya diabaikan (lihat contoh berikut).

— Perubahan panjang akibat berat sendiri *tidak* bergantung pada luas penampang (Lihat rumus 1.3.B.3)

Contoh 1.3.C : Gabungan berat sendiri dengan beban luar.

1.3.C.1. Sebuah kawat dengan luas penampang A = ½ cm^2, panjang L = 150 cm, berat jenis ρ = 7 g/cm^3 dan modulus keelastisan E = 2 x 10^6 kg/cm^2, digantung secara kokoh pada salah satu ujungnya. Pada ujung lainnya digantungi beban P = 500 kg. Hitunglah tambahan panjang kawat tersebut dan tegangan maksimumnya.

1.3.C.2. Jika tegangan batas (tegangan tarik maksimum yang diijinkan), σ_t = 1200 kg/cm^2 dan tambahan panjang kawat yang diijinkan δ = 2 mm, berapakah luas penammpang kawat terkecil yang masih dapat digunakan agar batas-batas yang diberikan tidak dilampaui ? (Besaran lainnya kecuali luas penampang diambil sama seeerti dalam soal 1.3.C.1).



gambar 1.3.C.1

Solusi : 1.3.C.1.
Tinjau unsur kawat setebal dy pada jarak y dari ujung bawah kawat (gambar 1.3.c.1) unsur tersebut mengalami gaya tarik sebesar :

$$P_y = \rho A y + P \qquad (1.3.C.1)$$

dengan :
ρ = berat jenis kawat
A = luas penampang kawat
P = beban di ujung kawat.

Unsur kawat setebal dy mengalami perpanjangan sebesar

$$\delta = \frac{\rho A y\, dy}{EA} + \frac{P\, dy}{EA} \qquad (1.3.C.2)$$

sehingga seluruh kawat mengalami perpanjangan sebesar :

$$\delta = \int_o^L \frac{\rho y\, dy}{E} + \int_o^L \frac{P\, dy}{EA}$$

$$\delta = \frac{\rho L^2}{2E} + \frac{PL}{EA} \qquad (1.3.C.3)$$

dengan : L = panjang kawat
E = modulus keelastisan kawat.

Tegangan yang terjadi pada penampang yang berjarak y dari ujung bawahnya adalah :

$$\sigma_y = \frac{P_y}{A} = \rho y + \frac{P}{A} \qquad (1.3.C.4)$$

Dengan memasukkan besaran yang diberikan ke dalam (1.3.C.3) kita peroleh (E = 2 x 10^9 g/cm^2) :
Tambahan panjang kawat,

$$\delta = \left(\frac{(7)(150)^2}{(2)(2)(10^9)} + \frac{(500)(1000)(150)}{(2)(10^9)(0{,}5)}\right) \text{cm}$$
$$= (3{,}94 \times 10^{-5} + 7{,}50 \times 10^{-2}) \text{ cm}$$
$$= 7{,}50 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

Lihat, apalah artinya perpanjangan akibat berat sendiri (= 3,94 x 10^{-5} cm) terhadap perpanjangan akibat seluruh beban yang ada.

Dari persamaan (1.3.C.4) kita peroleh tegangan maksimum yang terjadi di y = L, yakni :

$$\sigma_{maksimum} = \left((7)(150) + \frac{(500)(1000)}{0{,}5}\right) g/cm^2$$
$$= (1{,}05 + 1000)\, kg/cm^2$$
$$= 1001{,}5\, kg/cm^2$$

Lihatlah, "sumbangan" tegangan maksimum akibat berat sendiri terhadap tegangan maksimum seluruhnya hanya 0,0105%! Sehingga tegangan dan perpanjangan (perpendek-

Proyek Pembinaan Perpustakaan
Jawa Timur
T. A. 1993 / 1994

an) akibat berat sendiri, dalam kasus seperti itu, umumnya diabaikan.

1.3.C.2.

Untuk merancang luas penampang kawat terkecil sehigga batas tegangan 1200 kg/cm^2 tidak terlampaui, kita gunakan persamaan (1.3.C.4) sebagai berikut :

σ maksimum yang terjadi jika luas penampang = A adalah :

$$\sigma_{maks} = [(7)(150) + \frac{500000}{A}] g/cm^2 \leqslant 1200000 \ g/cm^2$$

atau $A \geqslant 0{,}417 \ cm^2$ (1.3.C.5)

Dengan persamaan (1.3.C.3) dan batas perpanjangan 0,2 cm kita peroleh :

$$\delta = (\frac{(7)(150)^2}{2(2)(10^9)} + \frac{(500000)(150)}{(2)(10^9)\ A}) \leqslant 0{,}2$$

atau $A \geqslant 0{,}188 \ cm^2$ (1.3.C.6)

Dari (1.3.C.5) dan (1.3.C.6) kita simpulkan bahwa luas penampang A yang memenuhi kedua batasan tersebut adalah :

$$A \geqslant 0{,}417 \ cm^2$$

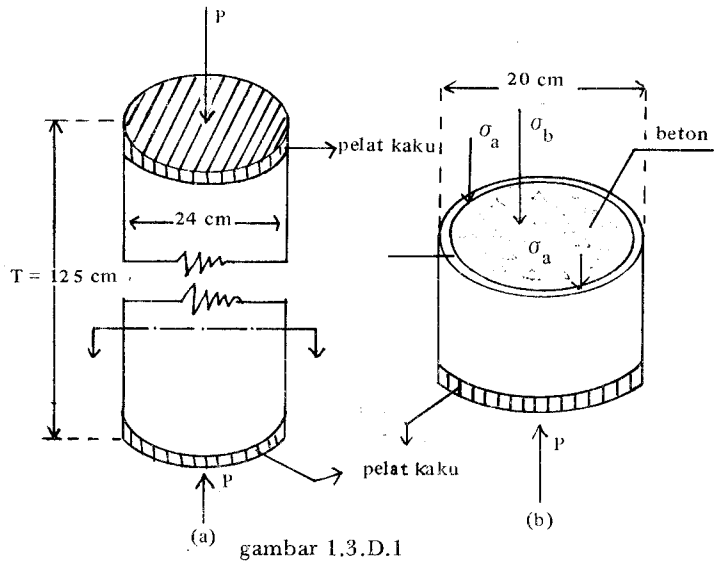
Contoh 1.3.D. : Batang paduan (komposit).

Sebuah tiang silindrikal beton yang dibungkus dengan pipa aluminium menahan gaya tekan sebesar P = 12 ton (gambar 1.3.D.1). Tinggi tiang tersebut T = 125 cm, garis tengah penampang beton 20 cm, tebal bungkus aluminium 2 cm. Modulus keelastisan beton dan aluminium adalah $E_b = 1{,}4 \times 10^5$ kg/cm^2 dan $E_a = 7 \times 10^5$ kg/cm^2. Andaikan pelat-pelat penyalur gaya P kaku sekali sehingga perpendekan yang terjadi baik pada beton maupun pada aluminium sama besar, hitunglah perpendekan yang terjadi pada tiang tersebut dan berapakah tegangan pada masing-masing bahan tiang tersebut, jika berat tiang diabaikan ?

Solusi :

Luas penampang beton, $A_b = \frac{1}{4} \pi (20)^2 \ cm^2 = 314{,}16 \ cm^2$
Garis tengah pipa bagian dalam $R_d = 20$ cm, dan garis tengah pipa bagian luar $R_1 = (20 + 2(2))$ cm = 24 cm, sehingga luas penampang pipa aluminium adalah

$$A_a = \frac{1}{4} \pi ((24)^2 - (20)^2) \ cm^2 = 138{,}23 \ cm^2$$



gambar 1.3.D.1

Diagram raga-lepas dalam gambar 1.3.D.1.b menunjukkan bahwa

$$P = \sigma_b A_b + \sigma_a A_a \quad (1.3.D.1)$$

dengan : σ_b = tegangan yang terjadi pada beton
σ_a = tegangan yang terjadi pada aluminium

Perpendekan beton δ_b = perpendekan aluminium δ_a

$$\frac{\sigma_b}{E_b} T = \frac{\sigma_a}{E_a} T$$

Atau

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{E_a}{E_b} = \frac{7 \times 10^5}{1{,}4 \times 10^5}$$

$$\sigma_a = 5\sigma_b \qquad (1.3.D.2)$$

Pergantian dengan (1.3.D.2) ke dalam (1.3.D.1) menghasilkan

$$\sigma_b = \frac{P}{A_b + 5\,A_a} \qquad (1.3.D.3)$$

Masukkan besar-besaran yang diberikan ke dalam (1.3.D.3), kita peroleh

$$\sigma_b = \frac{12000}{314{,}16 + 5(138{,}23)}\ \text{kg/cm}^2$$

$$= 11{,}937\ \text{kg/cm}^2$$

Dari (1.3.D.2) kita peroleh $\sigma_a = 5 \times 11{,}937\ \text{kg/cm}^2 = 59{,}685\ \text{kg/cm}^2$

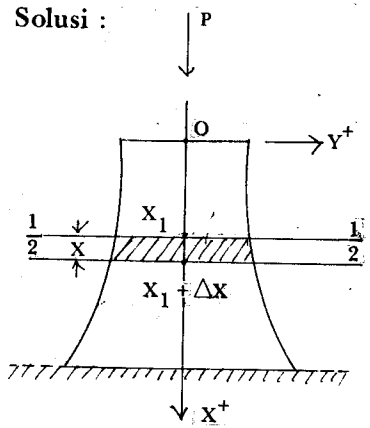
Perpendekan yang terjadi pada beton (pada aluminium)

$$\delta_b = \frac{\sigma_b}{E_b} T = \frac{11{,}937}{1{,}4(10)^5}\ 125\ \text{cm} = 0{,}011\ \text{cm}$$

Contoh 1.3.E

Dalam soal 1.3.B telah kita hitung tegangan pada suatu tiang akibat berat sendiri yang tentu saja, berubah-ubah di setiap penampang. Apabila kita ingin agar tegangan pada setiap penampang sama besarnya (= σ), tentulah semakin ke bawah penampang harus semakin besar, karena σ = Q/A, dan Q semakin besar juga (Lihat gambar 1.3.E.1). Yang akan kita cari adalah bagaimana bentuk perubahan penampang tersebut agar tegangan di setiap penampang sama besarnya.

Solusi :



gambar 1.3.E.1

Karena tegangan harus sama di mana-mana, tentulah P harus bekerja pada sumbu tiang yang melalui titik berat semua penampang melintangnya (Ingatlah syarat perlu agar tegangan sama besar di setiap titik pada penampang, pasal 1.2). Kemudian buatlah sistem koordinat cartesian seperti pada gambar 1.3.E.1.

Pandanglah gaya yang bekerja pada penampang 1-1, jika tegangan di situ sama dengan σ dan luas penampangnya kita sebut A = f(x), (luas penampang adalah fungsi x (= jarak dari titik 0)), maka $A_1 = f(x_1)$, dan

$$\sigma A_1 = P + Q_1 \qquad (1.3.E.1)$$

dengan : Q_1 = berat tiang di atas penampang 1-1.

Pada penampang sejauh $x_1 + \Delta x$, atau pada penampang 2-2 tentu juga berlaku :

$$\sigma A_2 = P + Q_2 \qquad (1.3.E.2)$$

dengan : Q_2 = berat tiang di atas penampang 2-2.

Kurangkan (1.3.E.2) dengan (1.3.E.1), kita peroleh :

$$\sigma(A_2 - A_1) = Q_2 - Q_1 \qquad (1.3.E.3)$$

atau

$$\sigma(\Delta A) = \Delta Q \qquad (1.3.E.4)$$

Jika berat jenis tiang tetap = ρ, maka $\Delta Q = \rho\ \Delta V$, dengan

ΔV = perubahan volume tiang yang bersangkutan.

Kita tahu pula bahwa

$$\Delta V = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(x)\,dx \qquad (1.3.E.5)$$

Menurut teorema nilai rata-rata untuk integral, jika f fungsi kontinu pada selang $[x_1, x_1 + \Delta x]$, maka ada x_o dalam selang tersebut sedemikian sehingga

$$\Delta V = f(x_o)\,\Delta x \qquad (1.3.E.6)$$

Alhasil, persamaan (1.3.E.4) dapat kita jadikan

$$\sigma(\Delta A) = \rho\, f(x_o)\,\Delta x \qquad (1.3.E.7)$$

Jika kita ambil limitnya untuk $\Delta x \to 0$,

$$\sigma dA = \rho A\, dx$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{\rho}{\sigma} dx$$

$$\ln A = \frac{\rho}{\sigma} x + C$$

$$A = K e^{\frac{\rho}{\sigma} x} \qquad (1.3.E.8)$$

Konstanta K bisa kita tentukan dari syarat batasnya. Misalnya jika luas penampang teratas tiang = A_o, maka untuk $x = 0$ (1.3.E.8) memberikan $K = A_o$, tetapi di situ berlaku $A_o = \frac{P}{\sigma}$, sehingga (1.3.E.8) menjadi :

$$A = \frac{\rho}{\sigma} e^{\frac{\rho}{\sigma} x} \qquad (1.3.E.9)$$

Catatan :

Persamaan yang kita turunkan di atas *bukan* merupakan persamaan bentuk lengkungan pada gambar 1.3.E.1, persamaan (1.3.E.9) hanya melukiskan *luas* penampang sejauh x dari titik 0, jadi tidak secara langsung menggambarkan bentuk tiang.

Jika, misalnya kita inginkan agar penampang tiang berbentuk lingkaran, maka bentuk tiang dapat kita tentukan. Misalkan persamaan bentuk lengkungan tiang adalah $y = g(x)$, maka luas penampang tiang sejauh x dari 0 tentulah sama dengan πy^2, dan dari (1.3.E.9) kita peroleh persamaan

$$\pi y^2 = A = \frac{P}{\sigma} e^{\frac{\rho}{\sigma} x}$$

atau

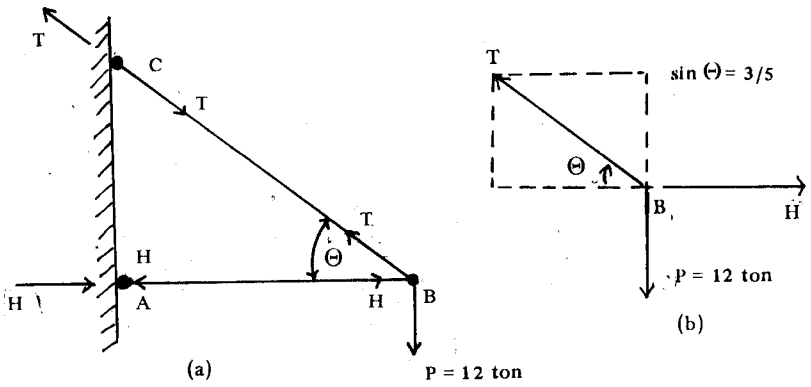
$$\pi y^2 - \frac{P}{\sigma} e^{\frac{\rho}{\sigma} x} = 0$$

Ini merupakan persamaan lengkungan tiang yang penampang melintangnya berbentuk lingkaran di mana-mana, tegangan pada setiap penampang sama besarnya ($= \sigma$), dan berat jenisnya sama dengan ρ.

Contoh 1.3.F : Peralihan titik akibat perubahan panjang.

Dua batang AB dan BC dihubungkan dengan sendi di ujung-ujungnya dan bersama-sama memikul beban sebesar 15 ton (gambar 1.3.F.1). Batang AB dibuat dari kuningan dengan modulus keelastisan $E_k = 10^6$ kg/cm^2 dan panjangnya $L_1 = 200$ cm. Batang BC dibuat dari tembaga dengan $E_t = 1{,}2 \times 10^6$ kg/cm^2 dan panjangnya $L_2 = 250$ cm. Sebelum dibebani batang AB terletak horizontal sedangkan jarak AC = 150 cm, sudut CAB = 90^o. Jika tegangan-tekan-batas batang AB : $\sigma_k = 800$ kg/cm^2, dan tegangan-tarik-batas batang BC : $\sigma_t = 850$ kg/cm^2, tentukan luas penampang terkecil yang diperlukan bagi batang AB dan batang BC; dan tentukan juga peralihan kedudukan titik B akibat pembebanan tersebut jika penampang terkecil tersebut yang digunakan.

S o l u s i :



gambar 1.3.F.1

Pertama kita tentukan dulu gaya H yang bekerja pada batang AB dan gaya T yang bekerja pada batang BC. Dari diagram raga-lepas untuk sendi B (gambar 1.3.F.1.b) kita peroleh :

$P = T \sin \Theta$, atau $T = 5/3\ (12)$ ton $= 20$ ton

dan $H = T \cos \Theta$, atau $H = 4/5\ (20)$ ton $= 16$ ton

Misalkan penampang AB luasnya sama dengan A_k dan penampang BC luasnya sama dengan A_t, maka untuk memenuhi syarat batas tegangan yang diijinkan,

$$\frac{H}{A_k} \leqslant 800 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{atau} \quad A_k \geqslant 20 \text{ cm}^2$$

dan

$$\frac{T}{A_t} \leqslant 850 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{atau} \quad A_t \geqslant 23{,}53 \text{ cm}^2$$

Dengan mengambil luas penampang batang AB, $A_k = 20$ cm^2 dan luas penampang BC, $A_t = 23{,}53$ cm^2 kita peroleh :

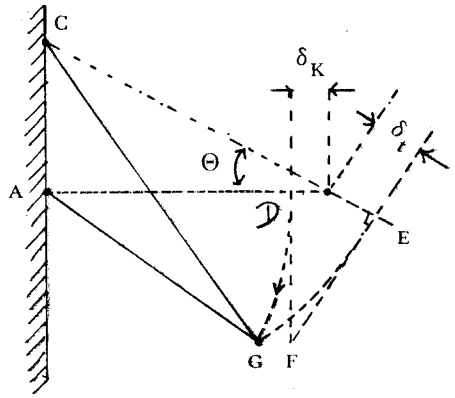
Perpendekan batang AB,

$$\delta_k = \frac{(16000)(200)}{(10^6)(20)} \text{ cm} = 0{,}16 \text{ cm}$$

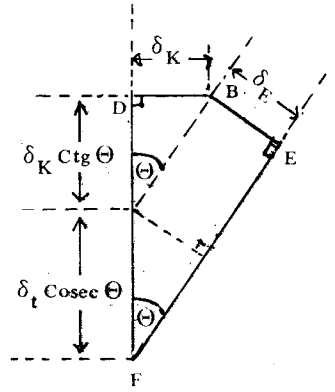
Perpanjangan batang BC,

$$\delta_t = \frac{(20000)(250)}{(1{,}2)(10)^6\,(23{,}53)} \text{ cm} = 0{,}18 \text{ cm}$$

Peralihan letak sendi B dapat ditentukan dengan penyederhanaan sebagai berikut (gambar 1.3.F.2 dan gambar 1.3.F.3) :



gambar 1.3.F.2



gambar 1.3.F.3

Marilah kita andaikan (gambar 1.3.F.3) bahwa akibat perpendekan batang AB titik B "beralih" ke titik D, dan akibat perpanjangan batang BC titik B "beralih" ke titik E, dan setelah itu, karena titik B harus tetap menyatu maka akhirnya titik D dan E, semuanya beralih ke titik G, seolah-olah batang AB (setelah menjadi AD) berputar pada sendi A dan batang BC (setelah menjadi EC) berputar pada sendi C.

Karena perubahan panjang yang terjadi pada kedua batang tersebut kecil sekali jika dibandingkan dengan panjang batang yang bersangkutan, maka sudut DAG dan sudut ECG juga kecil sekali, sehingga garis-garis lengkung DG dan EG boleh kita andaikan sebagai sama dengan garis-garis lurus DF dan EF, sehingga "segiempat" DBEG dapat kita dekati dengan segiempat DBEF. Dengan pengandaian tersebut perhitungan menjadi sederhana dan besar peralihan B ke arah horizontal (gambar 1.3.F.3), $\delta_h = \delta_k$, dan peralihan B ke arah vertikal, $\delta_v = \delta_k \operatorname{ctg} \Theta + \delta_t \operatorname{cosec} \Theta$.

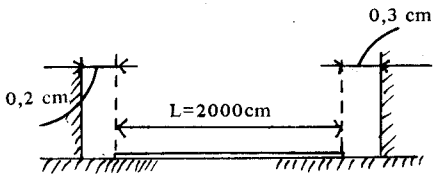
Dari hasil sebelumnya, $\delta_k = 0{,}16$ cm dan $\delta_t = 0{,}18$ cm serta mengingat $\sin \Theta = 3/5$, kita peroleh :

$$\delta_h = 0{,}16 \text{ cm dan } \delta_v = (0{,}16[4/3] + 0{,}18[5/3]) \text{ cm} = 0{,}51 \text{ cm}$$

Contoh 1.3.G : Tegangan akibat pengembangan yang tertahan.

Sebuah balok aluminium terletak di atas lantai licin (gesekan antara balok dengan lantai diabaikan), kedua ujungnya diapit oleh dinding yang kokoh. Sela antara ujung balok dengan dinding pada suhu 15° C masing-masing 2 mm dan 3 mm. Pada suhu 15°C panjang balok L = 20 meter, koefisien muai panjang aluminium $\alpha = 2{,}4 \times 10^{-5}/^{\circ}C$, E aluminium = 7×10^5 kg/cm^2, berapakah tegangan pada balok jika suhunya menjadi 35°C dan balok tetap dalam keadaan lurus serta dinding tidak beralih tempat.

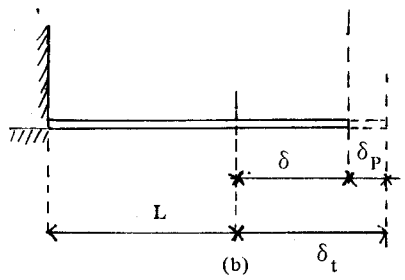
S o l u s i :



(a)

Andaikata tidak ada dinding yang menghambat pengembangan balok akibat panas, balok akan bertambah panjang sebesar $\delta_t = \alpha \Delta t\, L$

$$\delta_t = (2{,}4)(10^{-5})(35-20)(2000) \text{ cm} = 0{,}96 \text{ cm}$$



gambar 1.3.G.1

Pemuaian yang boleh terjadi tanpa hambatan hanyalah sebesar sela yang ada, yakni $\delta = (0{,}2 + 0{,}3)$ cm = 0,5 cm. Kelebihan pemuaian, $\delta_p = (0{,}96 - 0{,}5)$ cm = 0,46 cm harus ditanggulangi oleh dinding-dinding yang menekan balok dengan gaya sebesar P, gaya P ini pada giliran-nya akan "menekan" balok hingga "memendek sebesar δ_p, panjang balok "semula" adalah $L + \delta_t$, sehingga :

$$\delta_p = \frac{P\,(L + \delta_t)}{E\,A}$$

Tegangan tekan pada balok adalah :

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{E\delta_p}{L + \delta_t} \qquad (1.3.G.1)$$

Jadi, $\sigma = \dfrac{(7)(10^5)(0{,}46)}{2000 + 0{,}96}$ kg/cm^2 = 160,923 kg/cm^2

Contoh 1.3.H : Peralihan titik akibat kenaikan suhu.

Tiga buah batang dihubungkan dengan sendi di ujung-ujungnya, dan diletakkan di atas tumpuan sendi-rol (gambar 1.3.h.1). Batang AC dan BC dibuat dari baja, batang AB dari tembaga. Pada suhu 35°C panjang AB, BC dan AC masing-masing 7 m, $3\sqrt{2}$ m dan 5 m. Modulus keelastisan dan koefisien muai panjang baja dan tembaga adalah : $E_b = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2, $E_t = 1{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2, $\alpha_b = 1{,}2 \times 10^{-5}/^{\circ}C$, $q_t = 1{,}4 \times 10^{-5}/^{\circ}C$.

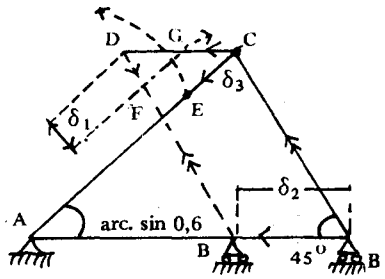
1.3.H.1. Jika suhu bangunan tersebut menjadi 10°C, tentukanlah peralihan titik-titik B dan C. (Abaikanlah berat batang masing-masing).

1.3.H.2. Jika tumpuan rol B diganti dengan sendi sehingga titik B tidak dapat beralih, apa yang terjadi pada batang-batang tersebut dan bagaimana pula dengan peralihan titik C ?

Solusi :

1.3.H.1. : Karena tumpuan B adalah rol, penyusutan batang AB tidak terhalangi, jadi titik B akan beralih bebas sebesar

$\delta_2 = (1{,}4)(10^{-5})(10 - 35)(700)$ cm
$= -0{,}245$ cm
(tanda negatif untuk menunjukkan penyusutan)

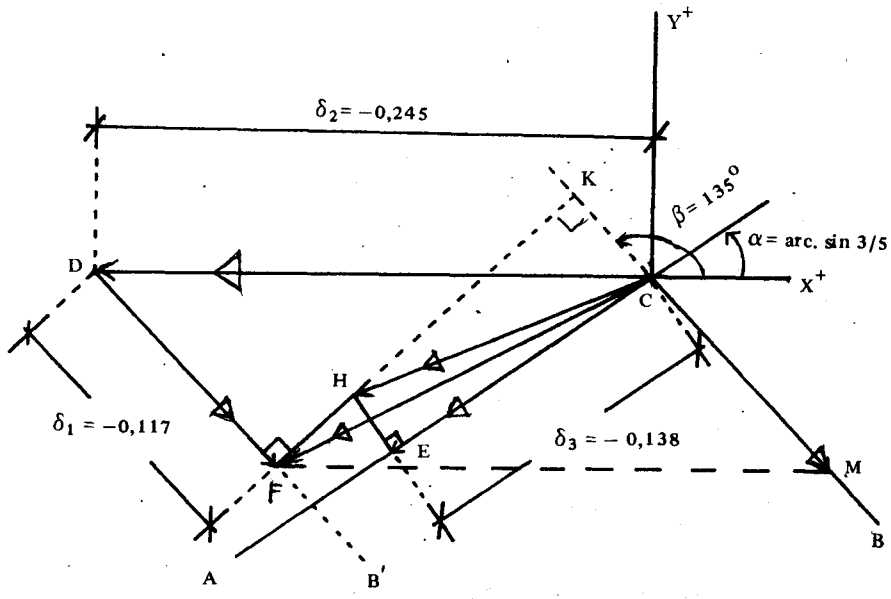


gambar 1.3.H.1

Batang BC menyusut sebesar
$\delta_1 = (1{,}1)(10^{-5})(10 - 35)(424{,}264)$ cm
$= -0{,}117$ cm

Batang AC menyusut sebesar
$\delta_3 = (1{,}1)(10^{-5})(10 - 35)(500)$
$= -0{,}138$ cm

Soal ini akan diselesaikan dengan aljabar vektor, karena hasilnya lebih bersifat umum, lagipula tinjauan peralihan dengan vektor adalah ide yang logikal karena alihan adalah besaran yang berarah, vektor. Tentu saja, cara seperti yang ditunjukkan pada contoh 1.3.F juga bisa digunakan.



gambar 1.3.H.2

Ketentuan :

- Jika batang bertambah panjang, ubahan panjangnya (δ) kita beri tanda positif dan sebaliknya, jika batang memendek, δ kita beri tanda negatif.
- Kedudukan semula suatu titik yang akan kita tinjau peralihannya, dalam contoh ini titik C, kita jadikan titik pangkal koordinat Cartesian vektor-vektor.
- Alihan titik pada suatu batang kita nyatakan dengan vektor ($\delta \cos \eta$; $\delta \sin \eta$), dengan :
  δ = ubahan panjang batang yang bersangkutan.
  η = sudut *batang* yang bersangkutan dengan sumbu X positif.

Contoh : Alihan titik C ke D,

$\overrightarrow{CD} = (\delta_2 \cos 0^o ; \delta_2 \sin 0^o) = (-0{,}245 ; 0)$

Alihan titik D ke F, (atau C ke M)

$\vec{DF} = (\delta_1 \cos 135^o ; \delta_1 \sin 135^o)$

$= (0{,}083 ; -0{,}083)$

Alihan titik C ke E

$\vec{CE} = (\delta_3 \cos 36{,}87^o ; \delta_3 \sin 36{,}87^o)$

$= (-0{,}110 ; -0{,}083)$

Tanpa kehilangan sifat umumnya, kita boleh menjadikan gambar 1.3.H.2 sebagai acuan pembahasan kita. Tujuan kita adalah menentukan vektor $\vec{CH}$ (x ; y), alihan titik C.

Pertama kita ikuti perjalanan titik C mengikuti peralihan rol B sebesar δ_2, yakni vektor $\vec{CD}$. Kemudian karena batang BC sendiri memendek sebesar δ_1, maka D akan beralih ke F, vektor $\vec{DF}$. Alhasil, melalui jalur ini titik C beralih sebesar

$\vec{CF} = \vec{CD} + \vec{DF}$, atau

$\vec{CF} = (\delta_2 \cos 0^o ; \delta_2 \sin 0^o) + (\delta_1 \cos \beta ; \delta_1 \sin \beta)$

$\vec{CF} = (\delta_2 + \delta_1 \cos \beta ; \delta_1 \sin \beta)$ (1.3.H.1)

Sedangkan pada batang AC, titik C beralih mengikuti vektor

$\vec{CE} = (\delta_3 \cos \alpha ; \delta_3 \sin \alpha)$ (1.3.H.2)

Selanjutnya, karena titik H diperoleh dengan menarik garis EH tegak lurus CE maka jelaslah bahwa proyeksi $\vec{CH}$ pada $\vec{CE}$ adalah $\vec{CE}$ sendiri. Dan dari aljabar vektor kita tahu bahwa proyeksi sembarang vektor $\vec{X}$ pada vektor $\vec{Y}$ adalah vektor $\vec{V}$ yang dinyatakan dengan rumus : (*)

$$\vec{V} = \frac{(\vec{X}.\vec{Y})\ \vec{Y}}{(\vec{Y}.\vec{Y})} \qquad (1.3.H.3)$$

dengan: $(\vec{X}.\vec{Y})$ = perkalian skalar $\vec{X}$ dengan $\vec{Y}$.

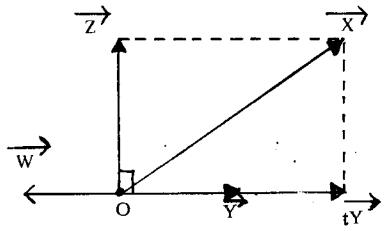
Sehingga kita peroleh :

$$\vec{CE} = \frac{(\vec{CH}.\vec{CE})\ \vec{CE}}{(\vec{CE}.\ \vec{CE})}$$

atau $(\vec{CH}.\vec{CE}) = (\vec{CE}.\ \vec{CE})$ (1.3.H.4)

Dengan $\vec{CH} = (x; y)$ dan $\vec{CE} = (\delta_3 \cos \alpha; \delta_3 \sin \alpha)$, maka (1.3.H.4) menjadi :

Catatan : (*)



Tulislah $\vec{X}$ dalam komponen $\vec{Z}$ dan $\vec{tY}$ (gambar 1.3.H.3), dengan $\vec{Z} \perp \vec{Y}$

$\vec{X} = \vec{Z} + \vec{tY}$. Kalikan dengan Y kita peroleh

$(\vec{X}.\vec{Y}) = (\vec{Z}.\vec{Y}) + (\vec{tY}.\vec{Y})$ karena $\vec{Z} \perp \vec{Y}$, tentulah perkalian skalar $\vec{Z}.\vec{Y} = 0$, alhasil kita peroleh : $(\vec{X}.\vec{Y}) = (\vec{tY}.\vec{Y})$ atau,

$t = \frac{(\vec{X}.\vec{Y})}{(\vec{Y}.\vec{Y})}$, sehingga proyeksi $\vec{X}$ pada $\vec{Y}$ adalah vektor

$\vec{V} = \vec{tY} = \frac{(\vec{X}.\vec{Y})\vec{Y}}{(\vec{Y}.\vec{Y})}$

jika arah $\vec{Y}$ sepihak dengan arah $\vec{X}$, $t > 0$, sebaliknya $t < 0$ jika yang kita pandang adalah $\vec{X}$ pada vektor $\vec{W} = k\ \vec{Y}$ yang berlawanan arah dengan $\vec{Y}$, tetapi vektor proyeksinya sama saja.

$$(x)(\delta_3 \cos\alpha) + (y)(\delta_3 \sin\alpha) = (\delta_3 \cos\alpha)^2 + (\delta_3 \sin\alpha)^2$$

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = \delta_3 \qquad (1.3.H.5)$$

Selanjutnya juga kita lihat bahwa titik H diperoleh dengan menarik garis FH tegak lurus $\vec{DF}$ (gambar 1.3.H.2), dalam hal ini kita gunakan kenyataan bahwa proyeksi $\vec{CF}$ pada $\vec{CK}$ sama dengan $\vec{CH}$ pada $\vec{CK}$, dan karena $\vec{CK}$ sejajar dengan $\vec{DF}$ tentulah proyeksi $\vec{CF}$ pada $\vec{DF}$ sama juga dengan proyeksi $\vec{CH}$ pada $\vec{DF}$. Alhasil kita peroleh :

$$(\text{proyeksi } \vec{CH} \text{ ke } \vec{DF}) = \frac{(\vec{CH}.\vec{DF})\,\vec{DF}}{(\vec{DF}.\vec{DF})} = \frac{(\vec{CF}.\vec{DF})\vec{DF}}{(\vec{DF}.\vec{DF})}$$

(proyeksi $\vec{CF}$ ke $\vec{DF}$)

atau
$$(\vec{CH}.\vec{DF}) = (\vec{CF}.\vec{DF}) \qquad (1.3.H.6)$$

Dengan $\vec{CH} = (x;y)$ dan $\vec{CF} = (\delta_2 + \delta_1 \cos\beta;\ \delta_1 \sin\beta)$ serta $\vec{DF} = (\delta_1 \cos\beta;\ \delta_1 \sin\nu\beta)$, persamaan (1.3.H.6) menjadi :

$$(x)(\delta_1 \cos\beta) + (y)(\delta_1 \sin\beta) = (\delta_2 + \delta_1 \cos\beta)(\delta_1 \cos\beta) + (\delta_1 \sin\beta)(\delta_1 \sin\beta)$$

atau

$$x \cos\beta + y \sin\beta = \delta_1 + \delta_2 \cos\beta \qquad (1.3.H.7)$$

Persamaan (1.3.H.7) dan (1.3.H.5) dapat ditulis dalam bentuk yang lebih padu, yakni dalam persamaan matriks :

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 + \delta_2 \cos\beta \\ \delta_3 \end{bmatrix} \qquad (1.3.H.8)$$

Jika $\alpha \neq \beta$ (jelas akan dipenuhi karena pasti AC tidak sejajar dengan BC) solusi persamaan 1.3.H.8) adalah :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin(\alpha - \beta)} \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\sin\beta \\ -\cos\alpha & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 + \delta_2 \cos\beta \\ \delta_3 \end{bmatrix} \qquad (1.3.H\ 9)$$

Dalam soal 1.3.H.1, $\delta_1 = -0{,}117$ cm, $\delta_2 = -0{,}245$ cm, $\delta_3 = -0{,}138$ cm, $\alpha = \text{arc sin } 0{,}6$ dan $\beta = 135^\circ$. Masukkan besaran-besaran tersebut ke dalam (1.3.H.9) kita peroleh :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-0{,}990} \begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}707 \\ -0{,}8 & -0{,}707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}056 \\ -0{,}138 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}133 \\ -0{,}053 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

Dengan demikian kita simpulkan bahwa titik C beralih ke kiri sejauh 0,133 cm dan ke bawah sejauh 0,053 cm.

1.3.H.2. : Jika tumpuan rol diganti dengan tumpuan sendi tentu akan terjadi tegangan tarik pada batang AB (lihat contoh 1.3.G), gaya-gaya tarik tersebut timbul sebagai reaksi terhadap penghalangan penyusutan batang AB. Besarnya tegangan tarik pada batang AB dapat kita hitung dengan rumus (1.3.G.1), dengan: $\delta_t = \delta_p = -0{,}245$ cm, L = 700 cm dan $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2. Hasilnya :

$$\sigma = -735{,}247 \text{ kg/cm}^2$$

Karena titik B tidak beralih tempat, $\delta_2 = 0$, sedangkan δ_1 dan δ_3 tetap sama dengan $-0{,}117$ cm dan $-0{,}138$ cm. Masukkan besaran-besaran tersebut ke dalam persamaan (1.3.H.9) kita peroleh hasil

$$x = -0{,}028 \text{ cm dan } y = -0{,}193 \text{ cm.}$$

Lihatlah, peralihan titik C pada soal ini dapat ditentukan bahkan *tanpa* membuat gambar sepotong pun jua.

Tegangan tidak timbul baik pada batang AC maupun CB karena batang-batang tersebut bisa berputar pada sendi-sendi A dan B secara bebas, tanpa terhalangi.

Contoh 1.3.I : Balok di atas dua sendi.

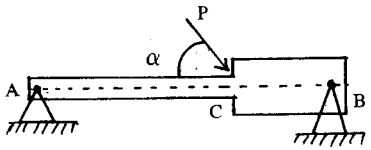
Ujung-ujung sebuah balok kayu ditumpu di atas sendi A dan B. Panjang balok 5 m, luas penampang balok

bagian AC, $F_x = 80\ cm^2$ dan bagian CB, $F_y = 120\ cm^2$. Panjang bagian AC, a = 3 m dan bagian CB, b = 2 m. Tepat di titik C bekerja gaya P sebesar 1500 kg, arah gaya P dengan sumbu balok AB membentuk sudut α, tg α = 0,75. Tentukan reaksi kedua tumpuan tersebut. (andaikan gaya-gaya reaksi tumpuan dan juga gaya P bekerja pada sumbu balok, dan abaikanlah berat balok).

Solusi : Misalkan reaksi tumpuan A = X, dan reaksi tumpuan B = Y. Dengan pembebanan seperti itu jelaslah bahwa batang AC tertarik oleh gaya X dan memanjang sebesar

$$\delta_x = \frac{X\,a}{E\,F_x},$$ batang CB tertekan oleh gaya sebesar Y dan memendek sebesar :

$$\delta_y = \frac{-Y\,b}{E\,F_y}$$



gambar 1.3.I.1

Karena A dan B tidak dapat beralih maka perpanjangan batang AC sama dengan perpendekan batang CB, sehingga kita dapatkan :

$$\frac{Xa}{EFx} - \frac{Yb}{EFy} = O$$

atau

$$X\,F_y a = Y\,F_x b \qquad (1.3.I.1)$$

Tetapi dari kesetimbangan statikal kita peroleh :

$$X + Y = P \cos \alpha \qquad (1.3.I.2)$$

Dengan memasukkan besaran yang telah diberikan, kita peroleh dari (1.3.I.1) :

$$X\,(120)(300) = Y\,(80)(200) \qquad (1.3.H.3)$$

dan dari (1.3.H.2)

$$X + V = 1500\,(0{,}8) \qquad (1.3.H.4)$$

Dari persamaan (1.3.H.3) dan (1.3.H.4) kita peroleh :

X = 369,231 kg dan Y = 830,769 kg (tekan)

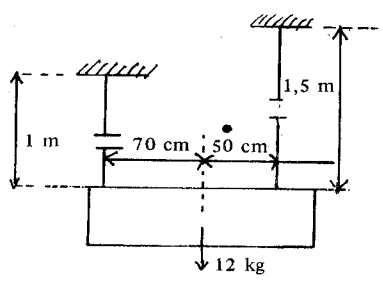
Reaksi tumpuan ke arah vertikal mudah ditentukan, yakni dengan kesetimbangan momen gaya di sendi A dan B hingga diperoleh :

V_A = 360 kg dan V_B = 540 kg.

Contoh 1.3.J : Penggantung papan reklame.

Sebuah papan reklame beratnya 12 kg digantung pada dua utas kawat. Panjang kawat yang satu 1 m dan yang satunya lagi 1,5 m. Sehubungan dengan masalah dekorasi, titik berat papan tersebut harus ditempatkan 50 cm dari kawat terpanjang dan 70 cm dari kawat terpendek. Rancangkanlah luas penampang kawat masing-masing agar papan yang sebelumnya horizontal tidak menjadi miring karenanya dan tegangan yang terjadi pada kawat tidak melampaui batas $\sigma = 500\ kg/cm^2$. Berat kawat diabaikan.

Solusi : Pertama-tama harus kita andaikan bahwa papan reklame tersebut tidak melentur sama sekali, jadi tepi atas dan bawah yang tadinya lurus tetap lurus (karena tebal papan jauh lebih kecil daripada tinggi papan).



gambar 1.3.J.1

Kawat yang panjangnya 1 m memikul sebagian berat papan reklame, yaitu sebesar :

$$\frac{50}{50 + 70}\ (12\ kg) = 5\ kg,$$

sehingga kawat bertambah panjang. Jika luas penampang kawat tersebut kita sebut A_1 maka tambahan panjang kawat tsb :

$$\delta_1 = \frac{5 \times 100\ cm}{E\,A_1}$$

Dan kawat yang panjangnya 1,5 m akan memikul berat papan sebesar (12 – 5)kg = 7 kg, sehingga kawat inipun bertambah panjang. Jika luas penampang kawat ini kita sebut A_2, maka tambahan panjang kawat adalah :

$$\delta_2 = \frac{7 \times 150 \text{ cm}}{E A_2}$$

Agar papan reklame tidak menjadi miring, maka perpanjangan kedua kawat tersebut di atas haruslah sama besarnya, $\delta_1 = \delta_2$ atau

$$\frac{(5)(100)}{E A_1} = \frac{(7)(150)}{E A_2}$$

$$A_2 = 2{,}1\, A_1 \qquad (1.3.J.1)$$

Tegangan tarik yang timbul pada masing-masing kawat adalah $7/A_2$ dan $5/A_2$, dan keduanya harus lebih kecil atau sama dengan $\sigma = 500$ kg/cm^2, sehingga kita peroleh :

$$\frac{7}{A_2} \leqslant 500 \text{ kg/cm}^2 \qquad (1.3.J.2)$$

$$\frac{5}{A_1} \leqslant 500 \text{ kg/cm}^2 \qquad (1.3.J.3)$$

Pergantian dengan (1.3.J.1) ke dalam pertidaksamaan (1.3.J.2) dan membandingkan dengan (1.3.J.3) akan menghasilkan :

$$A_1 \geqslant 0{,}01 \text{ cm}^2 \quad \text{dan} \quad A_2 = 2{,}1\, A_1$$

Perhatikan, A_2 *harus* dibuat sama dengan 2,1 A_1 agar papan tidak menjadi miring. Jadi A_2 tergantung pada pemilihan A_1 dan sebaliknya. Cobalah juga penyelesaian dengan grafik.

Contoh 1.3.K : Tiga buah penggantung.

Sebuah batang kaku yang diandaikan tidak dapat terlentur digantung dengan tiga buah kawat, kedudukan batang mula-mula horizontal. Jarak antara kawat 1 dengan kawat 2, a = 150 cm dan jarak antara kawat 2 dengan kawat 3, b = 160 cm. Panjang, modulus keelastisan dan luas penampang kawat-kawat tersebut masing-masing adalah sebagai berikut (abaikanlah berat kawat dan berat batang) :

$L_1 = 125$ cm, $E_1 = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2, $A_1 = 1{,}2$ cm^2
$L_2 = 115$ cm, $E_2 = 1{,}5 \times 10^6$ kg/cm^2, $A_2 = 0{,}8$ cm^2
$L_3 = 150$ cm, $E_3 = 1{,}8 \times 10^6$ kg/cm^2, $A_3 = 0{,}9$ cm^2

Sebuah gaya, P = 100 kg bekerja vertikal pada batang tersebut, dan berjarak x dari kawat 1 (gambar 1.3.K.1).

a. Tentukanlah x agar batang tersebut tetap horizontal.
b. Jika x = 150 cm, berapakah perpanjangan kawat masing-masing dan berapakah gaya aksial yang dideritanya ?

Solusi :

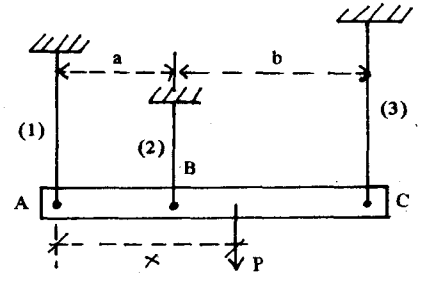
a. Agar batang tetap horizontal tentulah perpanjangan ketiga kawat tersebut sama besar. Sebutlah perpanjangan kawat 1, 2 dan 3 masing-masing dengan δ_1, δ_2 dan δ_3, serta gaya aksial yang bersangkutan dengan S_1, S_2 dan S_3,

$$\delta_1 = \delta_2$$

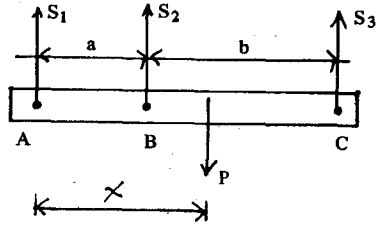
atau

$$\frac{S_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{S_2 L_2}{E_2 A_2}$$

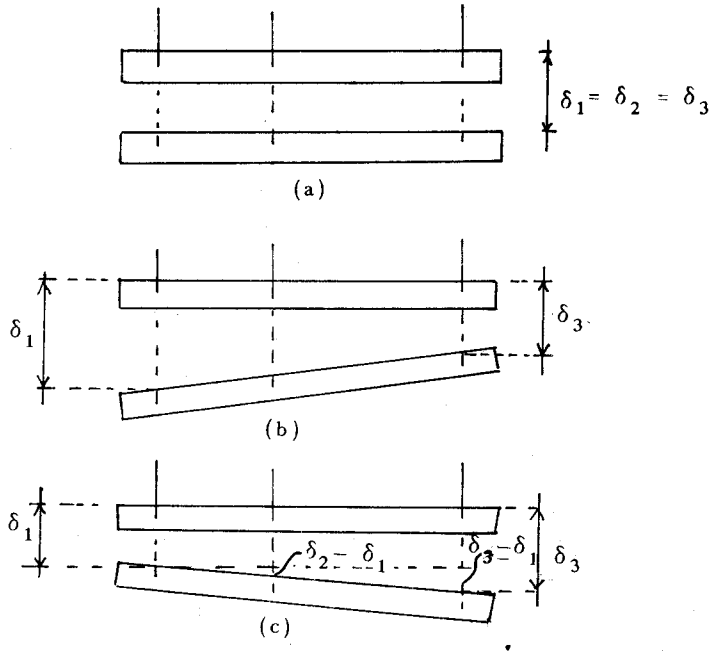
masukkan besaran yang diketahui, kita peroleh :



gambar 1.3.K.1



gambar 1.3.K.2



gambar 1.3.K.3

$$S_1 = 1{,}932\, S_2 \qquad (1.3.K.1)$$

dan $\delta_1 = \delta_3$ menghasilkan persamaan

$$S_1 = 1{,}867\, S_3 \qquad (1.3.K.2)$$

Berdasarkan raga lepas batang (gambar 1.3.K.2) kita peroleh :

Akibat kesetimbangan gaya :

$$S_1 + S_2 + S_3 = 100 \qquad (1.3.K.3)$$

Akibat kesetimbangan momen di titik B (boleh diambil di titik lain) :

$$a\, S_1 - b\, S_3 + P(x - a) = 0 \qquad (1.3.K.4)$$

Untuk mentukan besarnya gaya aksial yang bekerja pada masing-masing kawat kita cukup menggunakan 3 per-

samaan pertama, karena hanya ada "3 anu" yang akan dicari, perhitungan dengan ketiga persamaan tersebut menghasilkan :

$S_1 = 48{,}702$ kg ; $S_2 = 25{,}208$ kg dan $S_3 = 26{,}090$ kg.

Masukkan hasil tersebut dan besaran a, b dan P ke dalam (1.3.K.4) kita peroleh : $x = 103{,}30$ cm.

Catatan : Tempat beban P harus diletakkan (agar perpanjangan ketiga kawat menjadi sama besar) dikenal sebagai : Pusat Kekakuan kawat-kawat penggantung tersebut.

b. Karena batang tidak dapat terlentur maka kedudukan batang setelah kawat bertambah panjang, cuma punya tiga kemungkinan: tetap horizontal, miring ke kiri atau ke kanan. Kedudukan mana yang akan terjadi cukup ditentukan dari perpanjangan yang terjadi pada kawat-kawat pinggir saja (dalam gambar 1.3.K.1 adalah kawat 1 dan 3), sedangkan perpanjangan kawat 2 akan "menyesuaikan diri" dengan keadaan yang terjadi, karena batang tetap lurus.

Kemudian, karena $x > 103{,}30$ cm (Jarak pusat kekakuan dari kawat 1); maka jelaslah bahwa keadaan seperti pada gambar 1.3.K.3.c lah yang akan terjadi. Yang tidak kita ketahui adalah S_1, S_2 dan S_3, sedangkan persamaan yang telah kita dapat dari soal bagian a dan tetap berlaku adalah :

$$S_1 + S_2 + S_3 = 100 \text{ kg} \qquad (1.3.K.3)$$

dan

$$a\, S_1 - b\, S_3 + P(x - a) = 0 \qquad (1.3.K.4)$$

atau dengan menggunakan besaran yang diberikan kita peroleh :

$$120\, S_1 - 160\, S_3 + 3000 = 0 \qquad (1.3.K.5)$$

Satu persamaan lagi kita peroleh dari perbandingan geometrik yang harus dipenuhi, yakni :

$$\frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_1} = \frac{a}{a + b} \qquad (1.3.K.6)$$

Masukkan besaran yang diketahui sambil menggunakan hukum Hooke untuk menghitung perpanjangan masing-masing kawat, kita peroleh :

$$-28{,}323\ S_1 + 95{,}833\ S_2 - 39{,}722\ S_3 = 0 \qquad (1.3.K.7)$$

Dengan ketiga persamaan di atas mudahlah dihitung bahwa ;

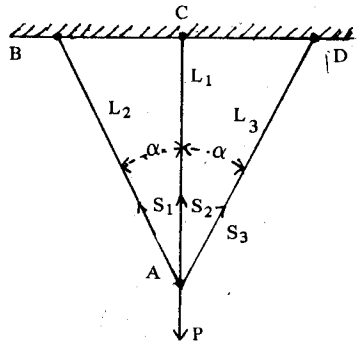
$S_1 = 31{,}167$ kg ; $S_2 = 26{,}708$ kg dan $S_3 = 42{,}125$ kg dan

$\delta_1 = 3{,}901 \times 10^{-3}$ cm ; $\delta_2 = 2{,}506 \times 10^{-3}$ cm ;
$\delta_3 = 3{,}901 \times 10^{-3}$ cm

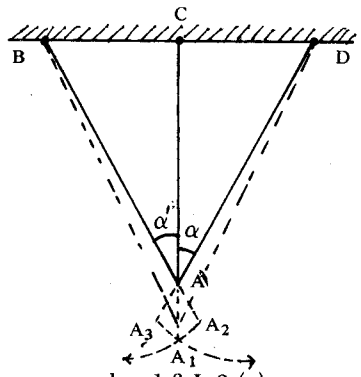
Contoh 1.3.L :

Tiga buah batang : AB, AC dan AD masing-masing digantung pada sendi-sendi penggantung B, C dan D (gambar 1.3.L.1). Ketiga batang terletak pada satu bidang datar dan menyatu dalam hubungan sendi di A. Kedudukan AC vertikal, dan kedudukan AB terhadap AC simetrik dengan kedudukan AD terhadap AC. Batang AC terbuat dari baja, $E_b = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2 sedangkan batang-batang AB dan AD terbuat dari bahan tembaga, $E_t = 1{,}2 \times 10^6$ kg/cm^2. Panjang batang AC, $L_1 = 160$ cm; Panjang batang AB dan AD sama besarnya, $L_2 = L_3 = 200$ cm. Luas penampang batang AC, $A_1 = 16$ cm^2 ; Luas penampang batang AB dan AD sama besarnya, $A_2 = A_3 = 15$ cm^2.

Beban vertikal P = 100 kg bekerja pada titik hubung A, sehingga ketiga batang mengalami tarikan. Tentukanlah gaya-gaya tarik yang bekerja pada masing-masing batang tersebut. (Abaikanlah berat batang).



gambar 1.3.L.1.



gambar 1.3.L.2.(a)

Solusi :

Gaya P pada titik kumpul A menyebabkan timbulnya gaya-gaya tarik S_1 pada batang AC, S_2 pada batang AB dan S_3 pada batang AD. Kesetimbangan statikal pada raga lepas titik A menghendaki terpenuhinya syarat-syarat :

$$S_1 + S_2 \cos\alpha + S_3 \cos\alpha = P = 100 \text{ kg} \qquad (1.3.L.1)$$

dan

$$S_1 = S_2 \qquad (1.3.L.2)$$

Pemaduan kedua syarat di atas sambil mengingat bahwa $\cos\alpha = 0{,}8$ menghasilkan :

$$S_1 + 1{,}6\ S_2 = 100 \text{ kg} \qquad (1.3.L.3)$$

Dengan hukum Hooke kita hitung dulu perpanjangan batang pada masing-masing, yakni :

Pada batang AC,

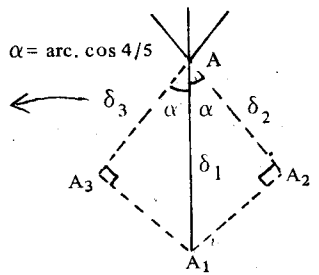
$$\delta_1 = \frac{S_1\ (160)}{(2{,}1)(10^6)(16)} \qquad (1.3.L.4)$$

Pada batang AB dan AD,

$$\delta_2 = \delta_3 = \frac{S_2\ (200)}{(1{,}2)(10^6)(15)} \qquad (1.3.L.5)$$

Karena kecilnya perpanjangan batang jika dibandingkan dengan panjang batang yang bersangkutan, maka garis

lengkung pada gambar 1.3.L.2 boleh kita dekati dengan garis lurus seperti pada gambar 1.3.L.3 di bawah ini : (lihat soal 1.3.F) :



gambar 1.3.L.3

Dari syarat geometrik yang harus dipenuhi ini (titik A beralih ke titik A_1 dan CA_1 tetap vertikal) kita peroleh

$\delta_1 = \delta_2 \sec \alpha = \delta_3 \sec \alpha$

atau

$\delta_1 = 1{,}25\, \delta_2$ (1.3.L.6)

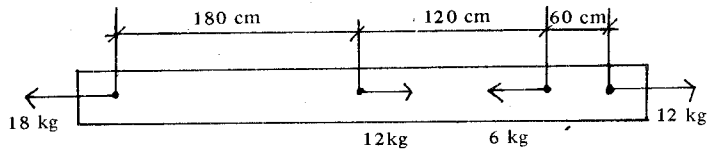
Pergantian dengan (1.3.L.4) dan (1.3.L.5) ke dalam (1.3.L 6) menghasilkan :

$S_1 = 2{,}92\, S_2$ (1.3.L.7)

Gunakan (1.3.L.7) ke dalam (1.3.L.3) kita peroleh : $S_2 = 22{,}12$ kg, $S_1 = S_3 = 64{,}59$ kg.

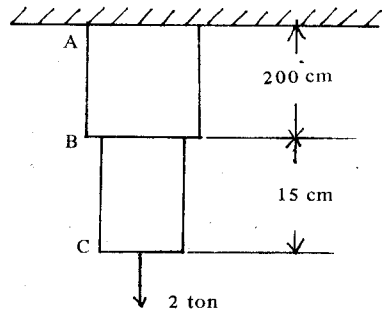
1.3.S.L. SOAL LATIHAN

1. Batang silindrikal, garis tengah penampangnya 1,5 cm, modulus keelastisannya 2,1 x 10^6 kg/cm^2. Tentukanlah gaya tarik P yang harus dikerjakan pada batang tersebut agar batang mengalami strain sebesar 0,0007. Abaikanlah berat batang.
2. Batang besi prismatik, berpenampang bujur sangkar 2 cm x 2 cm, mengalami pembebanan aksial seperti terlihat dalam gambar A. Tentukanlah strain yang terjadi pada batang tersebut. E besi = 2,1 x 10^6 kg/cm^2.



Gambar A

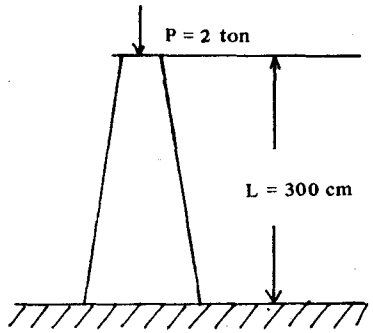
3. Sebuah batang besi silindrikal terdiri dari : Bagian AB, garis tengah penampangnya 4,5 cm dan panjangnya 200 cm. Bagian BC, garis tengah penampangnya 3,5 cm dan panjangnya 150 cm. Batang tersebut digantung secara kokoh pada ujung A dan dibebani sebesar 2 ton pada ujung C (gambar B). Berat jenis besi, γ = 7,7 gram/cm^3 ; E besi = 2,1 x 10^6 kg/cm^2.
Tentukanlah tambahan panjang batang ABC dan tegangan maksimum yang dideritanya.



Gambar B

4. Tentukanlah beban vertikal maksimum yang boleh dikerjakan pada ujung C batang dalam soal 3, jika tegangan batas batang, $\bar{\sigma}$ = 1400 kg/cm^2 dan tambahan panjang kawat yang diijinkan, $\bar{\delta}$ = 3,5 mm.
5. Tiang beton silindrikal setinggi 350 cm diletakkan vertikal di atas landasan yang kokoh dan menerima gaya tekan P = 50 kg pada ujung atasnya. Jika garis tengah penampang tiang 35 cm, berapakah perpendekan dan tegangan maksimum yang terjadi pada beton tersebut? Berat jenis beton = 2400 kg/cm^3; E beton = 1,4 x 10^5 kg/cm^2.
6. Batang kerucut terpancung berpenampang lingkaran (gambar C) berdiri di atas landasan yang kokoh dan menerima gaya tekan aksial pada puncaknya sebesar P = 2 ton. Garis tengah terkecil penampang batang D_1 =

10 cm; Garis tengah terbesar penampang batang D_2 = 30 cm. Panjang batang L = 300 cm. Tentukanlah perubahan panjang batang yang terjadi, jika E batang = $2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2 dan berat jenis batang γ = 7 gram/cm^3.

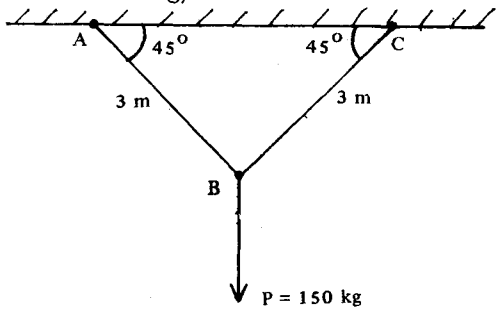


Gambar C

7. Jika pipa aluminium dalam contoh 1.3.D gambar 1.3.D.1 diganti dengan pipa baja, E baja = $2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2, dan tegangan tekan batas beton dan baja masing-masing adalah : σ beton = 60 kg/cm^2 dan σ baja = 1400 kg/cm^2, berapakah gaya tekan maksimum yang boleh dikerjakan pada batang paduan tersebut ? Abaikanlah berat batang.

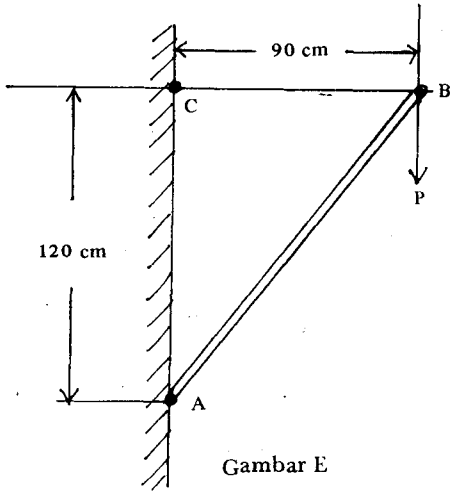
8. Dua buah batang tembaga : AB dan BC masing-masing digantung pada sendi-sendi penggantung A dan C (gambar D). Kedua batang masing-masing panjangnya 3 m, luas penampangnya = A, E batang = $1{,}2 \times 10^6$ kg/cm^2. Hubungan antara kedua batang di B adalah hubungan sendi.
Beban vertikal P = 150 kg bekerja di B, sehingga kedua batang mengalami tarikan.
   a. Tentukanlah luas penampang terkecil kedua batang, A, agar tegangan batang tidak melampui σ = 850 kg/cm^2.

   b. Tentukan juga peralihan kedudukan titik B, jika luas penampang terkecil tersebut yang digunakan.
(Abaikan berat batang).



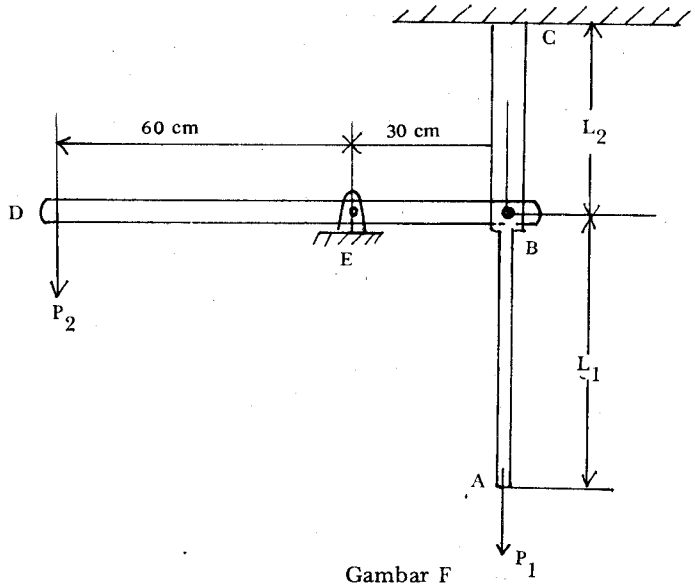
Gambar D

9. Batang kayu AB bertumpu pada sendi A dan kabel baja BC (gambar E). Luas penampang batang kayu AB, A_1 = 9,0 cm^2 ; Sedangkan luas penampang kabel BC, A_2 = 0,07 cm^2.
Tentukanlah peralihan titik B, jika di titik B bekerja beban vertikal P = 100 kg. E baja = $2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2. E kayu = 10^5 kg/cm^2.
(Abaikanlah berat batang kayu dan kabel).



Gambar E

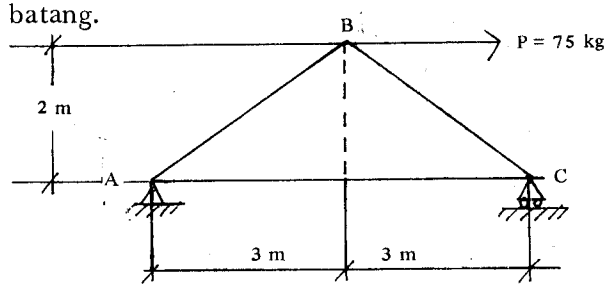
10. Bangunan dalam gambar F, terdiri dari batang horizontal DEB dan batang vertikal ABC. Kedua batang terbuat dari baja, E baja = 2,1 x 10^6 kg/cm^2 dan dihubungkan dengan sendi B. Tumpuan E adalah sendi; Tumpuan C adalah jepit. Beban vertikal P_1 dan P_2 masing-masing bekerja di A dan D. DE = 60 cm, EB = 30 cm.
Batang ABC terdiri dari : Bagian AB, panjangnya L_1, luas penampangnya A_1. Bagian BC, panjangnya L_2, luas penampangnya A_2. Tentukanlah P_1/P_2 agar titik A tidak mengalami peralihan vertikal. Abaikan berat batang.



Gambar F

11. Bangunan dalam gambar G, terdiri dari batang baja AB, BC dan AC. Ketiga batang dihubungkan dengan sendi di ujung-ujungnya, dan diletakkan di atas tumpuan sendi-rol. Luas penampang ketiga batang masing-masing sebesar A = 16 cm^2. E baja = 2,1 x 10^6 kg/cm^2. Tentukanlah peralihan titik B, jika di titik tersebut

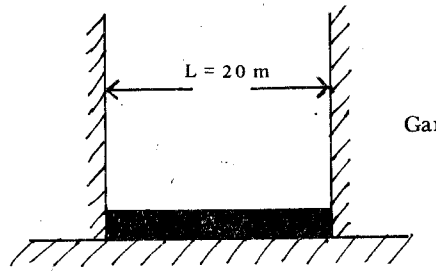
bekerja gaya horizontal P = 75 kg. Abaikanlah berat batang.



Gambar G

12. Jika batang AC pada bangunan dalam soal 10 gambar G diganti dengan batang tembaga, E tembaga = 1,1 x 10^6 kg/cm^2, dan suhu bangunan dinaikkan sebesar 20^{o}C, berapakah alihan vertikal dan horizontal titik B ? Koefisien muai baja dan tembaga masing-masing adalah : α_b = 1,2 x 10^{-5}/^{o}C dan α_t = 1,4 x 10^{-5}/^{o}C. (Abaikanlah berat batang).

13. Sebuah batang baja terletak di atas lantai licin, kedua ujungnya diapit oleh dinding yang kokoh (gambar H). Pada suhu 35^{o}C kedua ujung batang bersentuhan dengan dinding pengapit dan batang menderita tegangan tekan sebesar 150 kg/cm^2. Diandaikan bahwa batang dalam keadaan lurus. Jarak antara kedua dinding pengapit L = 20 m. Berapakah penurunan suhu minimum harus dilakukan agar batang menjadi bebas tegangan ? Koefisien muai panjang baja, α = 1,2 x 10^{-5}/^{o}C ;
E baja = 2,1 x 10^6 kg/cm^2.



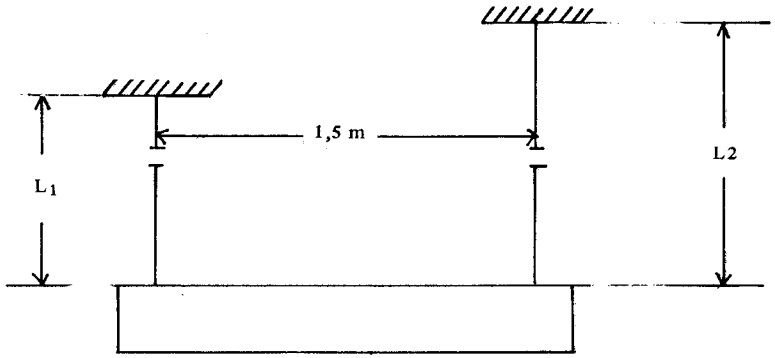
Gambar H

14. Sebuah benda kaku (diandaikan tidak dapat terlentur) beratnya 15 kg digantung dengan dua utas kawat (gambar I). Jarak antara kedua kawat 1,5 m. Panjang, modulus keelastisan dan luas penampang kedua kawat tersebut masing-masing adalah sebagai berikut :

$L_1 = 125$ cm, $E_1 = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2, $A_1 = 1{,}2$ cm^2
$L_2 = 175$ cm, $E_2 = 1{,}8 \times 10^6$ kg/cm^2, $A_2 = 0{,}8$ cm^2

a. Tentukanlah letak titik berat benda agar benda tersebut tetap horizontal.
b. Jika titik berat benda ditempatkan pada jarak 70 cm dari kawat yang pendek, berapakah perpanjangan kawat masing-masing dan berapakah tegangan yang dideritanya ?

Abaikanlah berat kawat.



Gambar I

15. Sebuah batang kaku yang diandaikan tidak dapat terlentur digantung dengan tiga buah kawat, kedudukan batang mula-mula horizontal. Jarak antara kawat 1 dengan kawat 2, a = 100 cm. Jarak antara kawat 2 dengan kawat 3, b = 150 cm. Panjang, modulus keelastisan dan luas penampang kawat-kawat tersebut masing-masing adalah sebagai berikut :

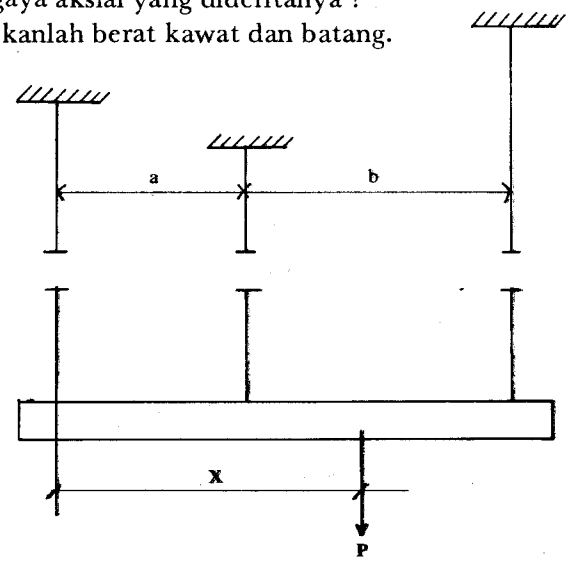
$L_1 = 135$ cm, $E_1 = 1{,}5 \times 10^6$ kg/cm^2, $A_1 = 0{,}9$ cm^2

$L_2 = 110$ cm, $E_2 = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2, $A_2 = 1{,}2$ cm^2
$L_3 = 150$ cm, $E_3 = 1{,}8 \times 10^6$ kg/cm^2, $A_3 = 0{,}9$ cm^2

Sebuah gaya, P = 120 kg bekerja vertikal pada batang tersebut, dan berjarak x dari kawat 1 (gambar K).

a. Tentukan x agar batang tersebut tetap horizontal.
b. Jika P bekerja tepat di bawah kawat 2, berapakah perpanjangan kawat masing-masing dan berapakah gaya aksial yang dideritanya ?

Abaikanlah berat kawat dan batang.



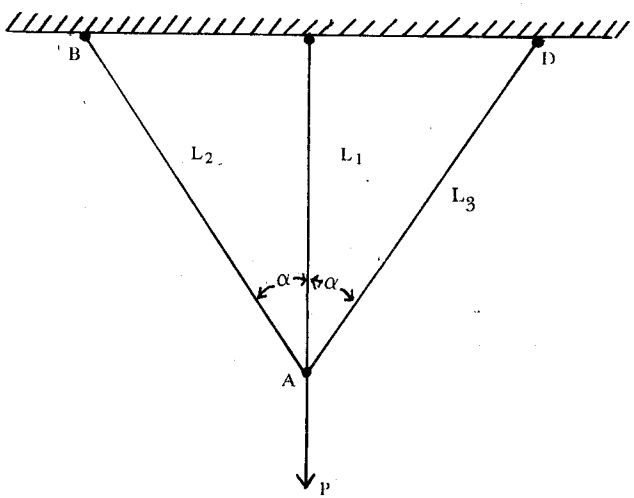
Gambar K

16. Tiga buah batang : AB, AC dan AD masing-masing digantung pada sendi penggantung B, C dan D (gambar L). Ketiga batang terletak pada satu bidang datar dan menyatu dalam hubungan sendi di A. Kedudukan AC vertikal, dan kedudukan AB terhadap AC simetrik dengan kedudukan AD terhadap AC. Batang AC terbuat dari tembaga. E tembaga = $1{,}2 \times 10^6$ kg/cm^2, tegangan-tarik-batasnya $\sigma_t = 850$ kg/cm^2. Batang AB dan AD terbuat dari kuningan, E kuningan = 10^6 kg/cm^2,

tegangan-tarik-batasnya σ_k = 800 kg/cm^2. Panjang batang AC, L_1 = 80 cm; Panjang batang AB dan AD sama besarnya, $L_2 = L_3$ = 100 cm. Luas penampang batang AC, A_1 = 20 cm^2; Luas penampang batang AB dan AD sama besarnya, $A_2 = A_3$ = 18 cm^2.

a. Tentukanlah beban vertikal P maksimum yang boleh dikerjakan pada titik hubung A.
b. Tentukanlah peralihan titik A, jika pada titik A bekerja beban vertikal P = 50 kg.

Abaikanlah berat kawat.

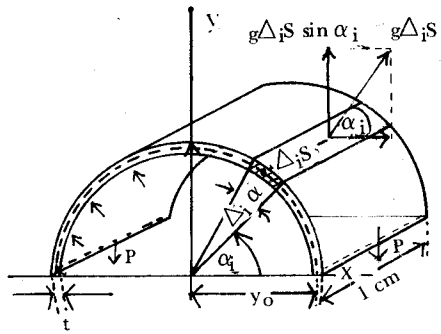


Gambar L

1.4. Pipa berdinding Tipis :

Pandanglah sebuah pipa silindrikal yang mengandung gas bertekanan di dalamnya, pipa tersebut tentu menderita tekanan radial yang *merata* pada dindingnya, misalkanlah besarnya g kg/cm^2. Berapa besar tegangan yang terjadi pada dinding pipa tersebut sangat menentukan tebal dan

bahan yang harus digunakan. Untuk itu tinjaulah bagian pipa sepanjang satu satuan panjang, 1 cm misalnya, kemudian "belahlah" bagian pipa tersebut melalui sumbunya menjadi dua bagian yangsimetrik, dan tinjaulah raga-lepas belahan tersebut (gambar 1.4.1)



Elemen busur pipa $\Delta_i S$ tentu akan menderita *gaya* sebesar $g\Delta_i S.1$ kg dengan arah tegak lurus busur yang bersangkutan. Jika kita uraikan gaya tersebut dalam arah X dan Y seperti pada gambar 1.4.1, maka gaya-gaya dalam arah X akan saling mengimbangi sehingga hanya gaya dalam arah Y lah yang harus diimbangi oleh bagian belahan pipa lainnya. Karena bentuknya simetrik, tentulah reaksi untuk menahan gaya akibat tekanan tersebut terbagi dua, katakanlah masing-masing sebesar P kg. Jika pipa tersebut berdinding tipis, masalahnya menjadi sederhana, karena P dapat kita anggap terbagi rata pada penampang tempat gaya tersebut bekerja. Sebutlah jejari rata-rata pipa tersebut sebagai r_o, dan letak busur $\Delta_i s$ kita tandai dengan sudut α_i, besar sudut di hadapan elemen busur yang bersangkutan kita sebut $\Delta_i \alpha$, maka $\Delta_i s = r_o \Delta_i \alpha$. Kesetimbangan statikal belahan pipa tersebut menghasilkan :

$$2P = \sum_{i=1}^{n} g.r_o \Delta_i \alpha \sin\alpha_i \qquad (1.4.1)$$

Jika kita ambil limitnya untuk $\Delta_i s \to 0$, akan kita peroleh:

$$2P = \int_o^{\pi} g\, r_o \sin\alpha \, d\alpha$$

atau

$$P = g r_o \qquad (1.4.2)$$

Jika tebal dinding pipa t cm, maka tegangan* yang terjadi pada penampang yang bersangkutan tentulah

$$\sigma = \frac{g\, r_o}{t} \text{ kg/cm}^2 \qquad (1.4.3)$$

Jika arah tekanan radial tersebut terbalik, tegangan yang diderita pipa akan bersifat menekan, tentu saja, tetapi uraian di atas tetap berlaku.

Gaya radial pada dinding suatu pipa tidak hanya dapat dihasilkan oleh gas atau cairan yang bertekanan, pengembangan secara radial (akibat perubahan suhu) yang tertahan, atau gaya centrifugal yang terjadi apabila pipa tersebut berputar pada porosnya juga menghasilkan gejala yang sama, marilah kita lihat beberapa contohnya.

Contoh 1.4.A :

Sebuah pipa dengan garis tengah bagian dalam 20 cm berisi air yang bertekanan 8 atm. Jika tegangan tarik yang diijinkan bagi bahan pipa tersebut 250 kg/cm^2, tentukanlah tebal pipa tersebut.

Soludi :

Misalkan tebal pipa sama dengan t cm. Jejari rata-rata pipa = (10 + t/2) cm, dan dari (1.4.3) kita dapatkan pertidaksamaan :

$$\sigma = \frac{(8)(1{,}0366)(10 + t/2)}{t} \leqslant 250$$

$$t \geqslant 0{,}34 \text{ cm}$$

Catatan :

Jika kita ambil jejari rata-ratanya sama dengan jejari dalamnya, akan kita peroleh $t \geqslant 0{,}33$ cm. Pendekatan semacam ini dimungkinkan juga karena dari semula kita sudah mengandaikan bahwa tegangan yang terjadi bersifat merata,

* Karena sifat tegangan yang bekerja secara tangensial, maka tegangan tersebut sering disebut tegangan tangensial.

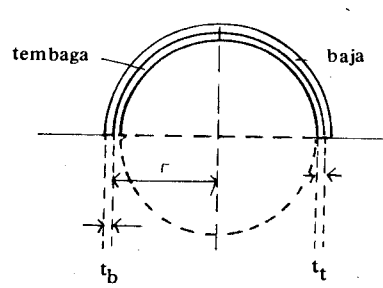
jadi kepersisan memang tidak dipentingkan. Pendekatan semacam ini akan banyak membantu apabila masalah yang dihadapi lebih rumit seperti dalam contoh berikut ini.

Contoh 1.4.B :

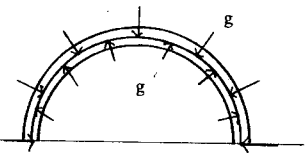
Sebuah gelang baja membungkus sebuah gelang tembaga (gambar 1.4.B.1). Diameter luar gelang tembaga persis sama dengan diameter dalam gelang baja, dan pada temperatur kamar kedua gelang tersebut tidak saling menekan. Jika temperatur kedua gelang tersebut bertambah T^o berapakah tegangan yang terjadi pada masing-masing gelang tersebut ? Misalkanlah tebal gelang, koefisien muai panjang dan modulus keelastisan masing-masing sebagai t_b, α_b, E_b dan t_t, α_t, E_t, dan tebal gelang kecil sekali jika dibandingkan dengan diameter gelang yang bersangkutan.

Solusi :

Karena $\alpha_t > \alpha_b$*, pemuaian gelang yang di dalam yakni gelang tembaga menjadi tertahan, sehingga antara gelang luar dan gelang dalam akan saling mendesak. Misalkanlah tekanan timbal balik yang terjadi sebagai g satuan tekanan (kg/cm^2 misalnya), terhadap gelang dalam ia bersifat menekan dari luar, sedangkan terhadap gelang luar ia mendesak dari dalam.



gambar 1.4.B.1



gambar 1.4.B.2

* Koefisien muai tembaga lebih besar daripada koefisien muai baja.

Pandanglah bagian gelang sepanjang satu satuan panjang. Karena tipisnya gelang-gelang tersebut maka untuk penyederhanaan perhitungan bolehlah kita ambil jejari luar gelang tembaga (gelang-dalam), sebutlah r, sebagai jejari rata-rata untuk kedua gelang tersebut (lihat catatan pada contoh 1.4.A). Sehingga tegangan yang terjadi pada gelang tembaga (bersifat menekan),

$$\sigma_t = \frac{gr}{t_t}$$

dan akibatnya tentu keliling gelang tersebut memendek sebesar

$$a = \frac{gr}{E_t t_t}(2\pi r)$$

Jika pengembangannya tidak tertahan, keliling gelang tersebut juga akan bertambah panjang akibat naiknya suhu sebesar T, yakni

$$b = \alpha_t T (2\pi r)$$

Dengan demikian gelang tesebut bertambah panjang sebesar

$$\delta_t = (\alpha_t T - \frac{gr}{E_t t_t})(2\pi r) \qquad (1.4.B.1)$$

Dengan cara serupa kita peroleh tambahan panjang gelang baja (gelang luar) sebesar

$$\delta_b = (\alpha_b T + \frac{gr}{E_b t_b})(2\pi r) \qquad (1.4.B.2)$$

Pertambahan panjang kedua gelang tersebut harus sama besarnya agar keduanya tetap "melekat" satu sama lain, sehingga dengan menyamakan (1.4.B.1) dengan (1.4.B.2) kita peroleh :

$$(\alpha_t - \alpha_b)T = gr\left(\frac{1}{E_b t_b} + \frac{1}{E_t t_t}\right) \qquad (1.4.B.3)$$

Alhasil, besarnya g dapat kita hitung, begitu pula tegangan pada masing-masing gelang.

Catatan :

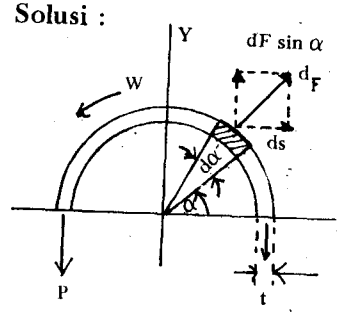
Dalam uraian di atas, besarnya jejari rata-rata kedua gelang kita andaikan sama dengan r, karena besarnya $r \pm t/2 \approx r$. Demikianlah, untuk menghitung tambahan panjang keliling gelang dalam kita gunakan jejari luarnya, dan untuk menghitung tambahan panjang gelang-luar kita gunakan jejari dalamnya.

Tentu saja, dengan pengandaian tersebut hasil yang diperoleh akan kurang "tepat", tetapi ketidak-tepatan sudah ada sejak pengandaian bahwa tegangan tangensial yang terjadi bersifat merata. Begitulah, penyederhanaan masalah dan pengandaian kita lakukan, dan hal semacam ini akan sering kita jumpai, oleh karena itu patokan dasar tentang kapan suatu pendekatan atau pengandaian boleh dilakukan, sebagaimana telah diuraikan pada permulaan bab ini, harus selalu kita perhatikan.

Contoh 1.4.C :

Sebuah gelang dengan jejari dalam r = 15 cm, tebal t = 0,5 cm dan tinggi h = 4 cm berputar pada porosnya dengan kecepatan, n = 2500 rpm. Tentukanlah tegangan yang terjadi pada gelang tersebut jika berat jenis gelang tersebut $\gamma = 6\ g/cm^3$.

Solusi :



gambar 1.4C.1

Tinjaulah belahan gelang tersebut dan pandanglah penampang belahan tersebut yang tegak lurus dan melalui tengah-tengah sumbu putarnya. Pada elemen busur gelang sebesar ds, yang masanya kita sebut

$$dm = \frac{\gamma}{g} h\, t\, ds \qquad (1.4.C.1)$$

dengan :

h = tinggi elemen ds

t = tebal elemen ds

γ = berat jenis gelang

g = percepatan gravitasi

akan terjadi gaya sentrifugal sebesar :

$$dF = dm\ \omega^2\ r_o \qquad (1.4.C.2)$$

dengan :

ω = kecepatan sudut putarannya.

r_o = jejari rata-rata gelang.

Jika kita uraikan gaya-gaya centrifugal tersebut dalam arah sumbu X dan Y seperti pada gambar 1.4.C.1, dan berdasarkan keseimbangan statikal serta mengganti dm seperti pada (1.4.C.1), akan kita peroleh (ingat $ds = r_o\ d\alpha$)

$$2P = \int_o^{\pi} \frac{\gamma}{g} h\ t\ \omega^2\ r_o^2\ \sin\alpha\ d\alpha \qquad (1.4.C.3)$$

$$P = \frac{\gamma}{g} h\ t\ \omega^2\ r_o^2 \qquad (1.4.C.4)$$

Tegangan yang terjadi :

$$\sigma = \frac{P}{th}$$

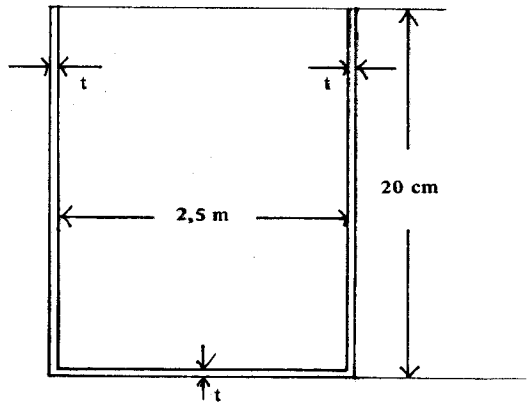
$$\sigma = \frac{\gamma}{g} \omega^2\ r_o^2 \qquad (1.4.C.5)$$

Kecepatan putaran gelang yang diberikan adalah n = 2500 rpm, jadi $\omega = 2\pi/60\ (2500)$ rad/detik, kemudian masukkan besaran yang sudah diberikan ke dalam (1.4.C.5), maka akan kita peroleh $\sigma = 95{,}64$ kg/cm^2.

Catatan : r_o *jangan* lagi didekati dengan r, karena harus dipangkat-duakan.

1.4.SL. SOAL LATIHAN

1. Tangki slindrikal, garis tengah bagian dalamnya 2,5 m, tingginya 20 m (gambar A). Bagian atas tangki terbuka dan tangki tersebut berisi penuh air, berat jenis air γ = 1 ton/m^3.
   Tentukanlah tebal t terkecil, jika tangki terbuat dari plat baja, tegangan batas baja $\bar{\sigma}$ = 1250 kg/cm^2. Andaikanlah sambungan plat baja sedemikian kokohnya sehingga pengaruhnya terhadap kekokohan plat baja dapat diabaikan.

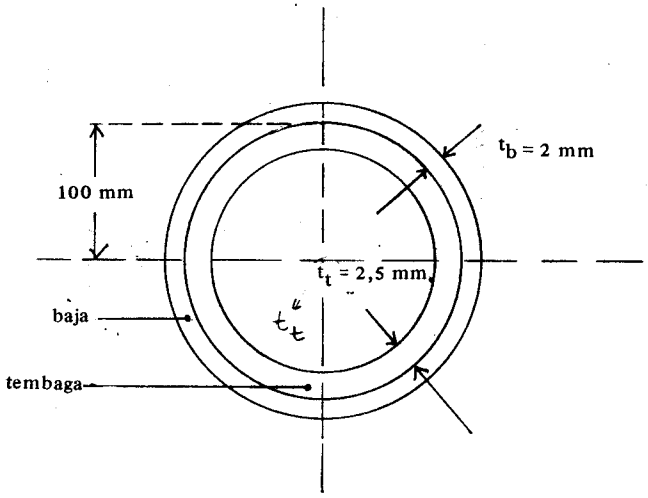


Gambar A

2. Tangki gas silindrikal, garis tengah bagian dalamnya 20 m. Tebal plat tangki, t = 10 mm dan tegangan batas plat, $\bar{\sigma}$ = 1250 kg/cm^2. Tentukanlah tekanan gas maksimum yang boleh bekerja di dalam tangki.

3. Sebuah gelang baja membungkus gelang tembaga (gambar B). Diameter luar gelang tembaga persis sama dengan diameter dalam gelang baja, yakni sebesar 100 mm. Tebal gelang baja, t_b = 2 mm; Tebal gelang tembaga t_t = 2,5 mm. Pada temperatur kamar, kedua gelang tersebut tidak saling menekan. Koefisien muai panjang dan mo-

dulus keelastisan baja serta tembaga masing-masing adalah : $\alpha_b = 1{,}2 \times 10^{-5}/^{o}C$, $\alpha_t = 1{,}4 \times 10^{-5}/^{o}C$, $E_b = 2{,}1 \times 10^{6}$ kg/cm^2, $E_t = 1{,}1 \times 10^{6}$ kg/cm^2.
Tentukanlah tegangan tangensial yang terjadi pada masing-masing gelang, jika temperatur kedua gelang tersebut dinaikkan sebesar 15^{o} C.



Gambar B

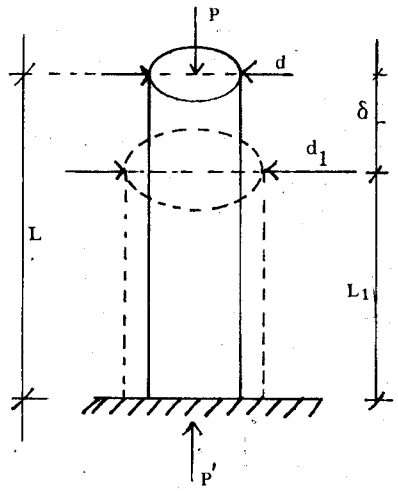
4. Sebuah gelang dengan jejari dalam r = 18 cm, tebal t = 0,6 cm dan tinggi h = 5 cm berputar pada porosnya dengan kecepatan, n = 2000 rpm. Tentukanlah tegangan yang terjadi pada gelang tersebut, jika berat jenis gelang tersebut $\gamma = 7$ gram/cm^3.

5. Tentukanlah kecepatan-putar-batas gelang dalam soal 4 di atas, jika tegangan batas gelang, $\overline{\sigma} = 1200$ kg/cm^2.

1.5 Angka Pembanding Poisson.

Suatu batang yang mengalami gaya tarik aksial akan bertambah panjang dalam arah sumbunya, tapi penampang

melintangnya akan menciut. Batang yang ditekan secara aksial akan memendek dalam arah sumbun a, tapi penampang melintangnya akan membesar. Dengan kata lain gejala tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut : Perubahan panjang aksial selalu diikuti oleh kontraksi melintang.



gambar 1.5.1

Batang silindrikal dalam gambar 1.5.1. mula-mula panjangnya L, diameternya d. Akibat tekanan gaya aksial P batang tersebut memendek sebesar δ, tapi diameternya membesar dari d menjadi d_1. Maka strain aksial yang terjadi adalah :

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

, dan strain melintangnya adalah :

$$\epsilon' = \frac{d_1 - d}{d}$$

Hasil percobaan di laboratorium, dengan berbagai macam bahan dan gaya P yang berubah-ubah besarnya, menunjukkan bahwa pada setiap jenis bahan perbandingan antara ϵ' dan ϵ merupakan nilai yang *tetap*, asalkan tegangan yang terjadi belum melampaui batas keelastisan bahan. Dengan kata lain, ϵ' berbanding lurus dengan ϵ,

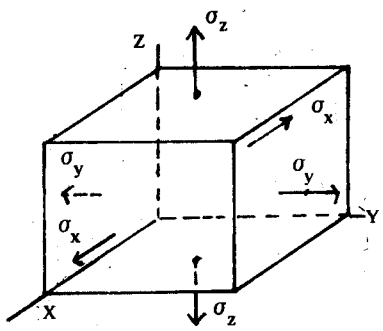
$$\frac{\epsilon'}{\epsilon} = \mu \text{ (bilangan tetap)} \qquad (1.5.1)$$

Hal yang sama juga terjadi apabila gaya P bekerja menarik batang tersebut, dan angka pembanding μ yang diperoleh pun sama besarnya dengan μ pada kejadian gaya P yang menekan.

Hubungan linier antara ϵ' dan ϵ ini mula-mula dikemukakan pada permulaan abad ke 19 oleh Poisson, seorang akhli matematika Prancis. Karenanya, angka pembanding μ di atas dinamakan orang : *angka pembanding Poisson.*

Angka pembanding Poisson ini (menurut percobaan) berkisar antara 0 sampai ½ untuk segala jenis bahan (yang elastis tentunya!). Tapi percobaan dengan baja memberikan hasil antara ¼ sampai ½, sedangkan percobaan dengan beton memberikan hasil antara 1/8 sampai 1/12.

Sekarang tinjaulah kejadian yang lebih umum, yakni balok prismatik tegak yang mengalami tiga tegangan normal (gambar 1.5.2), σ_x sejajar sumbu x, σ_y dan σ_z masing-masing sejajar sumbu Y dan Z.



gambar 1.5.2

Tinjaulah perubahan yang terjadi pada arah X misalnya. Akibat σ_x tentu timbul strain sebesar

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_x$$

Karena σ_y mengakibatkan juga strain ϵ_{yy} dalam arah Y, maka ϵ_{yy} pun mengakibatkan strain pada arah X yang selalu berlawanan tanda dengan ϵ_{yy}, oleh karena itu kita beri tanda negatif, dengan kata lain ϵ_{yy} menyebabkan

$$\epsilon_{xy} = -\mu\epsilon_{yy}$$

dengan μ = angka pembanding Poisson.

Demikian pula σ_z menyebabkan timbulnya ϵ_{zz} dan akibatnya menimbulkan strain pada arah X sebesar

$$\epsilon_{xz} = -\mu\epsilon_{zz}$$

Perhatikan cara penulisan, indeks pertama menunjukkan arah strain dan indeks ke dua menunjukkan arah tegangan penyebabnya.

Jadi, jika kita jumlahkan akan kita peroleh strain dalam arah X sebesar

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \mu(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})$$

atau

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)) \qquad (1.5.2)$$

Dengan cara serupa juga kita dapatkan dalam arah Y dan Z :

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)) \qquad (1.5.3)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)) \qquad (1.5.4)$$

Ketiga persamaan di atas, (1.5.2), (1.5.3) dan (1.5.4) dapat kita jadikan satu dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix} = \frac{\mu}{E}\begin{bmatrix} 1/\mu & -1 & -1 \\ -1 & 1/\mu & -1 \\ -1 & -1 & 1/\mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} \qquad (1.5.5)$$

dengan :

E = modulus keelastisan balok
μ = angka pembanding Poisson

Akibat perjanjian tanda yang sudah kita sepakati, tegangan tarik harus kita beri tanda positif dan tegangan tekan negatif, sehingga hal yang sama juga berlaku bagi strain, positif artinya bertambah panjang dan negatif bertambah pendek.

Selanjutnya, jika ukuran balok diketahui, ubahan isinya juga dapat kita hitung. Misalkan balok berukuran $I = (l_x)(l_x)(l_z)$, ubahan panjang pada sisi yang bersangkutan $\delta_x = \epsilon'_x l_x$, $\delta_y = \epsilon'_y l_y$ dan $\delta_z = \epsilon'_z l_z$. Sehingga isi balok sesudah mengalami perubahan menjadi :

$$I' = (l_x + \epsilon'_x l_x)(l_x y + \epsilon'_y l_y)(l_z + \epsilon'_z l_z)$$

$$I' = l_x l_y l_z (1 + \epsilon'_x)(1 + \epsilon_y)(l + \epsilon'_z) \qquad (1.5.6)$$

Karena kecilnya faktor strain, perkalian antara mereka boleh kita abaikan sehingga (1.5.6) menjadi :

$$I' = l_x l_y l_z (1 + \epsilon'_x + \epsilon'_y + \epsilon'_z) \qquad (1.5.7)$$

Dan ubahan isinya $\Delta I = I - I'$ menjadi :

$$\Delta I = I (\epsilon'_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \qquad (1.5.8)$$

Catatan : Perubahan isi per satuan isi,

$$\epsilon = \frac{\Delta I}{I} = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

kadang disebut sebagai DILATASI.

Kembali ke persamaan (1.5.5.), jika E, μ, dan tegangan pada arah X, Y dan Z diberikan, kita bisa menghitung besarnya strain pada masing-masing arah secara langsung, tinggal mengalikan matriks-matriks di ruas kanan persamaan tersebut. Sebaliknya jika diberikan strain pada arah X, Y dan Z, μ serta E, kita juga bisa menghitung tegangan-tegangan pada arah X, Y dan Z, asal matriks yang tengah pada persamaan tersebut tidak singular, artinya determinannya tidak nol.

Contoh 1.5.A :

Dalam suatu percobaan di laboratorium, sebuah batang silindrikal yang terbuat dari bahan kuningan, panjangnya mula-mula adalah L = 40 cm, diameternya 10 cm. Gaya tekan sebesar P = 20 ton yang dikerjakan pada batang tersebut menyebabkan perpendekan pada batang sebesar δ = 0,010 cm dan perbesaran diameter batang sebanyak 0,00055 cm. Dari data-data percobaan ini, tentukanlah modulus keelastisan kuningan (= E) dan angka pembanding Poisson-nya ($= \mu$).

Solusi :

Dari rumus (1.3.1) di muka kita peroleh :

$$E = \frac{P L}{\delta A} = \frac{20\ (10^3)(40)}{(0{,}01)\pi(10^2)}\ \text{kg/cm}^2$$

$$E = 1{,}02 \times 10^6\ \text{kg/cm}^2.$$

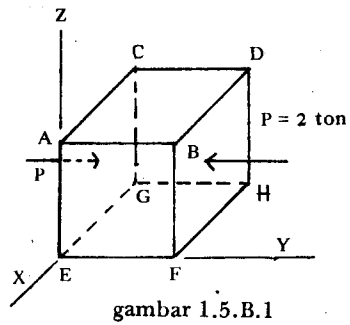
Angka pembanding Poisson dapat ditentukan dengan rumus (1.5.1)

$$\mu = \frac{\epsilon'}{\epsilon} = \frac{0{,}00055(10^{-1})}{0{,}010\ (40^{-1})}$$

$$\mu = 0{,}22$$

Contoh 1.5.B :

Kubus kayu ABCDEFGH (gambar 1.5.B.1) berukuran 10 x 10 x 10 cm^3 dengan modulus keelastisannya E = 10^5 kg/cm^2 dan angka pembanding Poisson-nya μ = 0,25. Kemudian dilakukan penekanan sebesar P = 2 ton terhadap kubus tersebut, dikerjakan pada titik berat bidang ACEG dan BDFH. Tentukanlah ubahan isi yang terjadi pada kubus tersebut, akibat penekanan yang dialaminya itu.



gambar 1.5.B.1

Solusi :

Gunakan persamaan (1.5.5) dengan mengisi $\sigma_y = \frac{-2000}{100}$ kg/cm^2. $\sigma_x = 0$ dan $\sigma_z = 0$ serta besaran yang diketahui, kita peroleh :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix} = \frac{0{,}25}{100000} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mudah dihitung bahwa $\epsilon_x = 5 \times 10^{-5}$, $\epsilon_y = -2 \times 10^{-4}$ dan $\epsilon_z = 5 \times 10^{-5}$

Dengan rumus (1.5.8) kita hitung,

$$\Delta I = 1000\,(5 - 20 + 5)(10^{-5})\ \text{cm}^3$$
$$\Delta I = -0{,}1\ \text{cm}^3$$

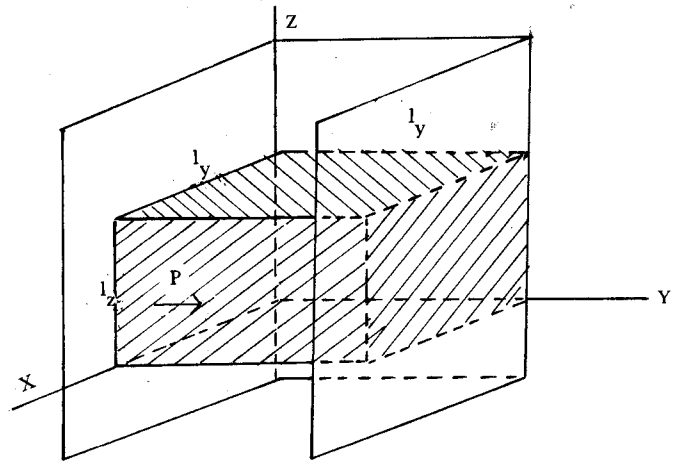
Karena tanda ΔI negatif, isi kubus berkurang.

Contoh 1.5.C :

Sebuah balok primatik tegak berukuran l_x = 12 cm, l_y = 15 cm dan l_z = 10 cm. E balok = 2×10^5 kg/cm^2, μ balok = 1/3. Balok ditekan dalam arah X dengan gaya P = 18 ton, sedangkan dalam arah Y balok dihalangi perubahannya dengan "jepitan", sebaliknya dalam arah Z perubahannya dibiarkan bebas (lihat gambar 1.5.C.1).
Hitung tegangan balok dalam arah Y, σ_y dan ubahan isinya.

Solusi :

$$\sigma_x = -\frac{18000}{(15)(10)}\ \text{kg/cm}^2 \cdot \quad \sigma_z = 0,$$ (perubahannya bebas)



gambar 1.5.C.1

$\epsilon_y = 0$ karena dalam arah ini perubahan dihalangi, timbul σ_y.

Masukkan besaran yang diberikan ke dalam persamaan (1.5.5),

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ 0 \\ \epsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{6 \times 10^5} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -120 \\ \sigma_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari baris ke dua matriks di atas kita peroleh :

$$\sigma_y = -40\ \text{kg/cm}^2$$

Kemudian, dari baris ke satu dan ke tiga kita peroleh $\epsilon_x = -5{,}333 \times 10^{-4}$ dan $\epsilon_z = 2{,}667 \times 10^{-4}$

Ubahan isinya kita hitung dengan rumus (1.3.8),

$$\Delta I = (12)(15)(10)(-5{,}333 + 0 + 2{,}667)\ 10^{-4}\ \text{cm}^3 ;$$
$$\Delta I = -0{,}48\ \text{cm}^3$$

Contoh 1.5.D :

Jika balok pada contoh 1.5.C kita panaskan sehingga suhunya naik sebesar 25°C, dan pengembangannya ke *semua* arah kita halangi, berapakah tegangan pada masing-masing arah jika koefisien muai panjangnya $\alpha = 2 \times 10^{-5}/^{\circ}C$.

Solusi :

Strain yang seharusnya terjadi jika pengembangan balok tidak dihalangi adalah :

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = -2 \times 10^{-5} \ (25)$$
$$= -5 \times 10^{-4}$$

Masukkan semua besaran yang diberikan ke dalam persamaan (1.5.5),

$$10^{-4} \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{6 \times 10^5} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

Tanda negatif kita berikan untuk strain karena di sini kita pandang seolah-olah strain dalam arah sebaliknyalah yang harus dihasilkan oleh tegangan yang timbul akibat tertahannya pengembangan balok.

$$\begin{bmatrix} -300 \\ -300 \\ -300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

Dengan terlebih dulu menentukan invers matriks 3 x 3 di ruas kanan kita peroleh :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -300 \\ -300 \\ -300 \end{bmatrix}$$

sehingga kita dapatkan $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -300 \ kg/cm^2$.

Catatan :

Di sini kita lihat bahwa ukuran balok sama sekali tidak terlihat, hal ini tidak perlu mengherankan kita, jika kita ingat kembali hubungan antara tegangan dengan strain seperti pada rumus (1.3.2), yakni $\sigma = E\epsilon$.

1.5.SL. SOAL LATIHAN

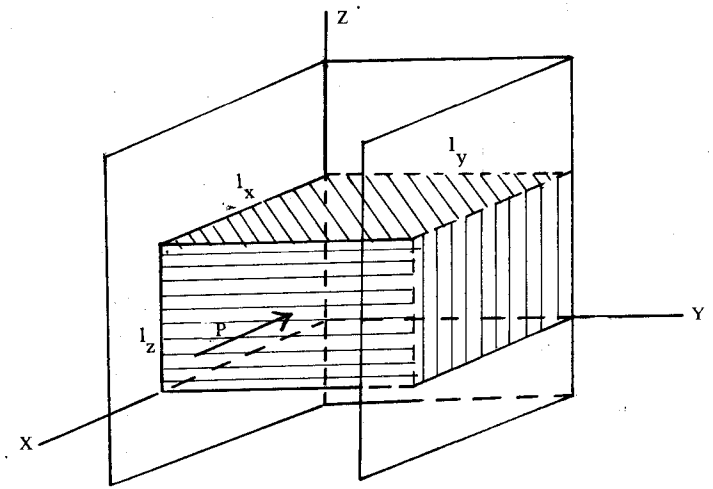
1. Sebuah batang baja prismatik, panjangnya 1 m, penampangnya berbentuk bujur sangkar berukuran 5 cm x 5 cm. Tentukanlah perubahan ukuran penampang batang, jika gaya tarik P = 20 ton bekerja pada kedua ujung batang tersebut. E batang = 2,1 x 10^6 kg/cm²; μ batang = 0,3.

2. Batang kuningan silindrikal, garis tengah penampangnya 3 cm. E kuningan = 10^6 kg/cm² ; μ kuningan = 0,28. Tentukanlah perubahan garis tengah penampang batang, jika pada kedua ujung batang dikerjakan gaya tekan P = 25 ton.

3. Batang aluminium prismatik, panjangnya 25 cm, penampangnya berbentuk bujur sangkar berukuran 5 cm x 5 cm. Akibat baya tarik P yang bekerja pada kedua ujungnya, batang mengalami strain sebesar 0,001. Tentukanlah isi batang setelah P bekerja. μ batang = 0,33.

4. Sebuah balok prismatik tegak berukuran l_x = 15 cm, l_y = 18 cm dan l_z = 12 cm. E balok = 10^5 kg/cm² ; μ balok = 0,25. Balok ditekan dalam arah X dengan gaya P = 5 ton, sedangkan dalam arah Y balok dihalangi perubahannya dengan "jepitan", sebaliknya dalam arah Z dibiarkan bebas (lihat gambar A).

Hitunglah tegangan balok dalam Y, σ_y, dan ubahan isinya.



Gambar A

5. Sebuah balok prismatik tegak berukuran l_x = 12 cm, l_y = 16 cm dan l_z = 9 cm. E balok = 2 x 10^5 kg/cm^2; μ balok = 0,33. Suhu balok dinaikkan sebesar 20^{o}C, dan pengembangannya ke semua arah dihalangi. Berapakah tegangan pada masing-masing arah, jika koefisien muai panjang balok α = 2 x 10^{-5} /^{o}C ?

***

BAB II
GAYA DALAM

Suatu struktur dirancang untuk dapat memikul beban-beban yang diramalkan akan bekerja pada dirinya, tentu saja ia harus stabil dan kokoh. Keadaan stabil akan tercapai jika sistem bangunan tersebut dapat menimbulkan gaya-gaya lawan untuk mengimbangi beban yang dipikulnya, untuk itulah orang membuat pelbagai tumpuan struktur yang, dapatlah kita katakan, sebagai "penadah" terakhir beban struktur tersebut melalui bagiannya yang lain, dan bagian struktur tersebut pada gilirannya akan menderita tegangan-tegangan yang resultannya merupakan gaya-gaya-dalam.

Penganalisaan bangunan umumnya dimulai dengan menghitung reaksi-reaksi tumpuan yang akan terjadi, yang pada hakekatnya, merupakan usaha seorang perancang untuk mengetahui besarnya gaya yang diramalkan akan harus dipikulnya. Kemudian tegangan yang bakal terjadi pada bagian struktur lainnya juga harus ditentukan untuk merancang ukuran dan bentuk penampangnya, sedemikian rupa sehingga tegangan yang terjadi tidak melampaui batas kekokohan bahannya.

Nah, sebagaimana telah kita lihat dalam bab sebelumnya, tegangan berkaitan dengan gaya-dalam aksial dan demikian pula halnya dengan gaya-dalam lain. Oleh karena itu penentuan besar dan arah gaya-dalam akibat beban luar perlu kita bahas terlebih dahulu, sebelum kita bahas hubungan antara gaya-dalam dengan tegangan yang ditimbulkannya. Dan sebagai tahap awal akan kita bicarakan dulu gaya-dalam yang terjadi pada bangunan dwimatra statis tertentu.

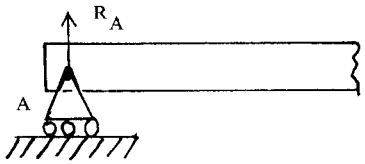
Istilah statis tertentu dipakai untuk menerangkan sistem bangunan yang reaksi-reaksi tumpuannya dapat ditentukan hanya dengan menggunakan kedua persamaan kesetimbangan statikal, sedangkan dwi-matra berarti bahwa : (1) semua sumbu batang diasumsikan terletak pada satu bidang datar (= bidang gambar) dan, (2) semua gaya diasumsikan bekerja pada sumbu-sumbu batang tersebut, dan garis-garis kerjanya pun terletak sebidang dengan sumbu-sumbu batang tersebut.

2.1. Sifat-sifat Tumpuan.

Analisa bangunan umumnya dimulai dengan menghitung reaksi-reaksi tumpuannya dan untuk keperluan itu orang harus tahu akan semua sifat yang dimiliki tumpuan yang bersangkutan.

Berikut ini akan dapat anda ikuti uraian singkat tentang sifat-sifat yang dimiliki oleh beberapa jenis tumpuan yang biasa digunakan dalam bangunan teknik sipil :

1. **Tumpuan Rol**: Sesuai dengan namanya, tumpuan ini mempunyai rol (gambar 2.1.1) yang memungkinkannya untuk bergerak dalam arah sejajar bidang landasannya, sedangkan hubungannya dengan batang struktur merupakan hubungan sendi. Akibatnya :



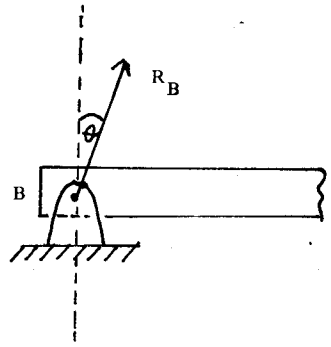
gambar 2.1.1

a. Mirip dengan masalah permukaan licin yang bertindak sebagai tumpuan suatu benda dalam pelajaran mekanika dasar dulu, tumpuan ini pun hanya dapat memberikan gaya reaksi yang tegak lurus bidang landasannya.

b. Karena hubungannya dengan batang struktur merupakan hubungan sendi, maka kebebasan berputar yang diberikan oleh sendi *tidak memungkinkan* tumpuan tersebut untuk memberikan *reaksi momen.*

Jadi tumpuan rol *hanya* dapat memberikan *reaksi* berupa *gaya yang tegak lurus bidang landasannya.*

2. **Tumpuan sendi** : Sesuai dengan namanya, tumpuan ini berhubungan secara sendi dengan batang struktur; tapi *tidak* seperti rol, tumpuan ini *tidak dapat beralih tempat* ke arah manapun juga.



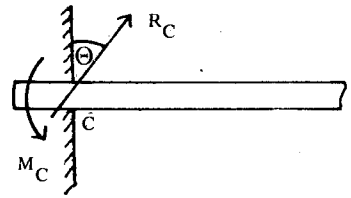
gambar2.1.2

Akibatnya :

a. Tumpuan ini *tak dapat memberikan reaksi momen.*
b. Tumpuan ini *sanggup memberikan reaksi gaya ke arah mana pun juga,* bergantung pada struktur dan pembebanannya.

Jadi, tumpuan sendi dapat memberikan reaksi gaya yang bebas *arah*-nya.

3. **Tumpuan jepit** : Tumpuan ini menjepit salah satu ujung batang yang berhubungan langsung dengannya, hingga segala niat batang yang bersangkutan untuk beralih tempat maupun berputar (berotasi) dihalanginya dengan reaksi gaya dan momen. Jadi, tumpuan jepit dapat memberikan reaksi *gaya* dan *momen.*

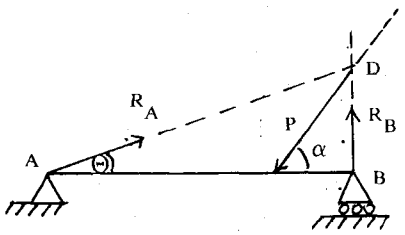


gambar 2.1.3

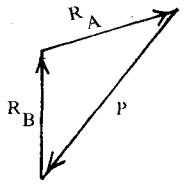
Contoh 2.1.A :

Balok AB dengan dua buah tumpuan, sendi A dan rol B (gambar 2.1.A.1.a). Panjang balok 4 m, beban terpusat P sebesar 500 kg bekerja pada titik C, sejauh 1 m dari B. Sudut antara garis kerja P dengan garis horizontal adalah α = arc tg 4/3. Tentukan reaksi-reaksi tumpuan balok tersebut jika berat balok diabaikan.

Solusi :



gambar 2.1.A.1.a

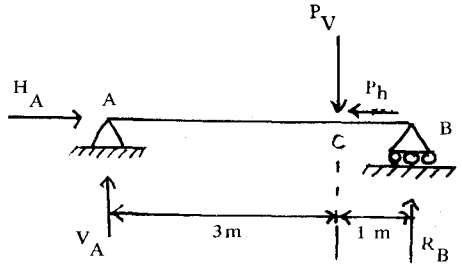


gambar 2.1.A.1.b

Tumpuan rol hanya dapat memberikan reaksi berupa gaya yang tegak lurus bidang landasannya, berarti garis kerja R_B harus vertikal.

Tumpuan sendi dapat memberikan reaksi berupa gaya yang arahnya tergantung dari keadaan struktur dan pembebanannya. Titik D dalam gambar 2.1.A.1.a adalah titik potong antara garis kerja R_B dan P, maka dalam persoalan ini, garis kerja R_A harus berimpit dengan garis AD agar struktur dalam keadaan setimbang.

Reaksi-reaksi tumpuan R_A dan R_B dapat ditentukan dengan cara grafik (gambar 2.1.A.1.b), atau dengan cara analitik sebagai berikut :



gambar 2.1.A.2

Gaya P sebagai beban luar kita uraikan dulu dalam komponen vertikal, $P_V = P \sin \alpha = 400$ kg dan komponen horizontal, $P_h = P \cos \alpha = 300$ kg.

Reaksi R_A yang belum kita ketahui arahnya, kita nyatakan dulu dalam uraian vertikal V_A dan uraian horizontal H_A ; sedangkan R_B sudah kita ketahui akan bekerja vertikal (gambar 2.1.A.2).

Dengan persamaan-persamaan kesetimbangan gaya, dapat kita tentukan reaksi-reaksi tumpuan tersebut :

$\Sigma H = 0$; $H_A = P_h = 300$ kg ($\rightarrow$)

$\Sigma M_B = 0$; $V_A(4) - P_V(1) = 0$,

atau

$$V_A = \frac{(400)(1)}{4} = 100 \text{ kg } (\uparrow)$$

Maka $R_A = \sqrt{H_A^2 + V_A^2} = 316{,}23$ kg ($\angle\Theta$), membentuk sudut Θ = arc tg 1/3 dengan garis horizontal.

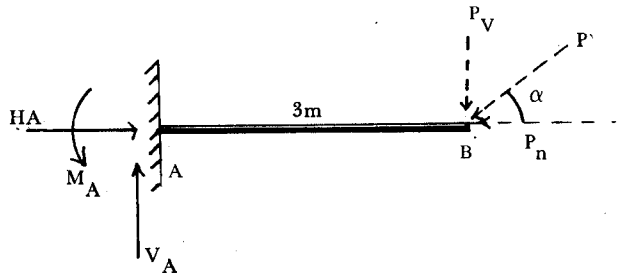
$\Sigma V = 0$; $R_B = P_V - V_A = 400 - 100 = 300$ kg ($\uparrow$)

Contoh 2.1.B :

Balok AB sepanjang 3 m, terjepit sempurna pada salah satu ujungnya (ujung A). Beban terpusat P = 100 kg bekerja

pada ujung lainnya (ujung B), membentuk sudut α = arc tg ¾ dengan garis horizontal (gambar 2.1.B.1). Jika berat balok diabaikan, tentukanlah reaksi tumpuan jepit di A tersebut.

Solusi :



gambar 2.1.B.1

Uraian vertikal gaya P adalah $P_V = P \sin \alpha = 60$ kg(↓); sedangkan uraian horizontalnya adalah $P_h = P \cos \alpha = 80$ kg (←).

Tumpuan jepit A dapat memberikan reaksi gaya dan momen. Reaksi gaya di A, katakanlah R_A, yang belum diketahui arahnya itu kita nyatakan dulu dalam uraian vertikal ($= V_A$) dan uraian horizontal ($=H_A$); sedangkan reaksi momennya kita nyatakan dengan M_A.

Dengan prinsip kesetimbangan gaya dapat kita tentukan reaksi-reaksi tumpuan tersebut :

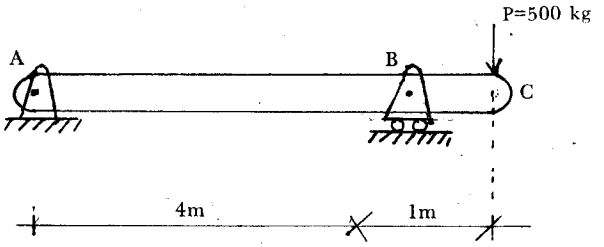
$\Sigma H = 0$; $H_A = P_h = 80$ kg (→).
$\Sigma V = 0$; $V_A = P_v = 60$ kg (↑).

Reaksi gaya di A : $R_A = \sqrt{H_A^2 + V_A^2} = 100$ kg ($\angle\alpha$), membentuk sudut α = arc tg ¾ dengan garis horizontal.

$\Sigma M_A = 0$; $M_A = P_V(3) = 180$ kgm ↺ , merupakan reaksi momen di A.

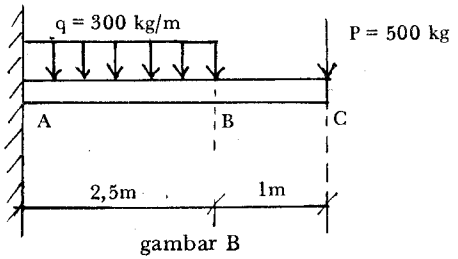
2.1. SL. SOAL LATIHAN

1. Balok ABC bertumpu pada sendi A dan rol B (gambar A). Panjang AB = 4 m, BC = 1 m. Berat balok = 60 kg/m' ; Beban terpusat P = 500 kg bekerja di C. Tentukan reaksi tumpuan A dan B.



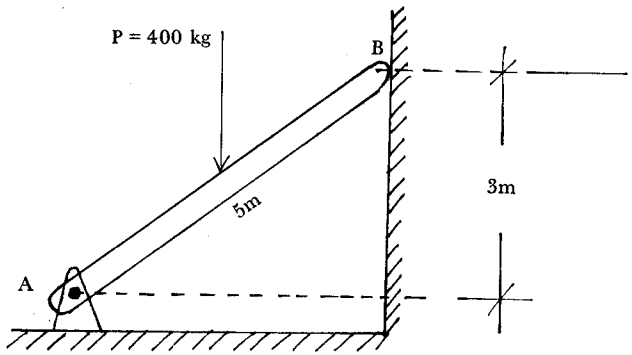
Gambar A

2. Balok ABC, beratnya 400 kg/m', terjepit sempurna di A (gambar B). Panjang AB = 2,5 m, BC = 1 m. Beban terbagi rata q = 300 kg/m' bekerja di sepanjang bagian AB; Beban terpusat P = 500 kg bekerja di C. Tentukan reaksi tumpuan jepit A.



gambar B

3. Balok AB, panjangnya 5 m, bertumpu pada sendi A dan bersandar pada dinding vertikal yang licin (gambar C). Berat balok 30 kg/m'; Beban terpusat P = 400 kg bekerja vertikal di tengah-tengah balok. Tentukanlah reaksi tumpuan di A dan gaya normal pada dinding di B.

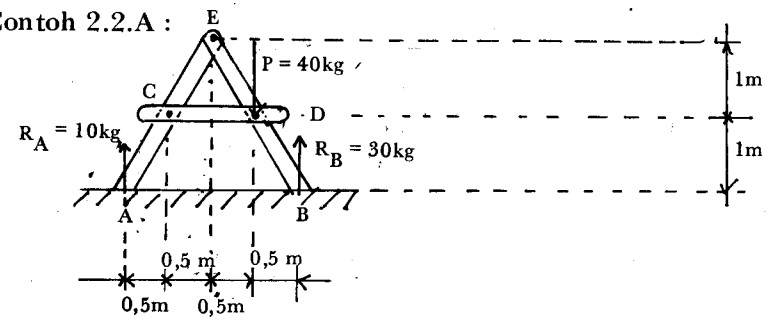


Gambar C

2.2. Kesetimbangan Raga-lepas.

Dasar analisa semua struktur adalah kesetimbangan gaya pada struktur yang bersangkutan. Reaksi-reaksi tumpuan membentuk kesetimbangan dengan beban-beban luar (kesetimbangan luar) dan lebih lanjut, setiap bagian struktur pun berada dalam kesetimbangan (Ingat, konsep kesetimbangan pada setiap mata rantai sebagai suatu raga-lepas dalam bab I pasal 2 gambar 1.2.2 serta pada potongan batang – gambar 1.2.5). Prinsip kesetimbangan bagian struktur sebagai suatu raga-lepas inilah yang dipakai untuk menentukan gaya-gaya-dalam suatu struktur.

Contoh 2.2.A :



gambar 2.2.A.1

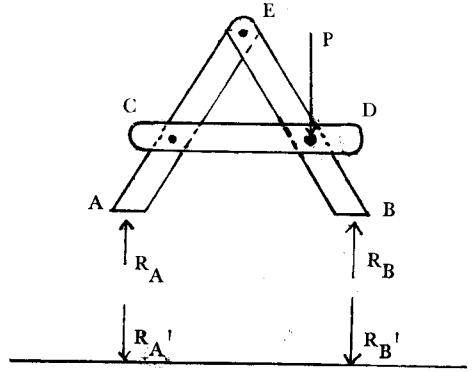
Bangunan tangga seperti terlihat dalam gambar 2.2.A.1, terdiri dari batang AE, BE dan CD. Hubungan antar batang di titik C, D dan E merupakan hubungan sendi (sendi dalam). Beban terpusat P = 40 kg bekerja vertikal di titik D, yang dalam hal ini dianggap sebagai satu-satunya beban luar karena berat semua batang diabaikan.

Dari kesetimbangan sistem secara keseluruhan kita peroleh :

R_A = 10 kg (↑) merupakan reaksi lantai di titik A, dan R_B = 30 kg (↑) merupakan reaksi lantai di titik B.

Dari penjelasan di bab I telah dapat kita mengerti bahwa perkataan : "reaksi benda 1 terhadap benda 2" mempunyai arti bahwa benda 1 memberikan aksi kepada benda 2 sebesar aksi yang diberikan benda 2 kepada benda 1 (ingat, hukum Newton III), sehingga dalam masalah yang sedang kita hadapi sekarang inipun dapat kita mengerti peristiwa yang terjadi antara tangga dan lantai (gambar 2.2.A.2).

R'_A dan R'_B dalam gambar 2.2.A.2 tersebut menunjukkan aksi tangga terhadap lantai, sedangkan R_A dan R_B merupakan aksi balasan lantai terhadap tangga, yang masing-masing sama besarnya dengan R'_A dan R'_B tersebut.



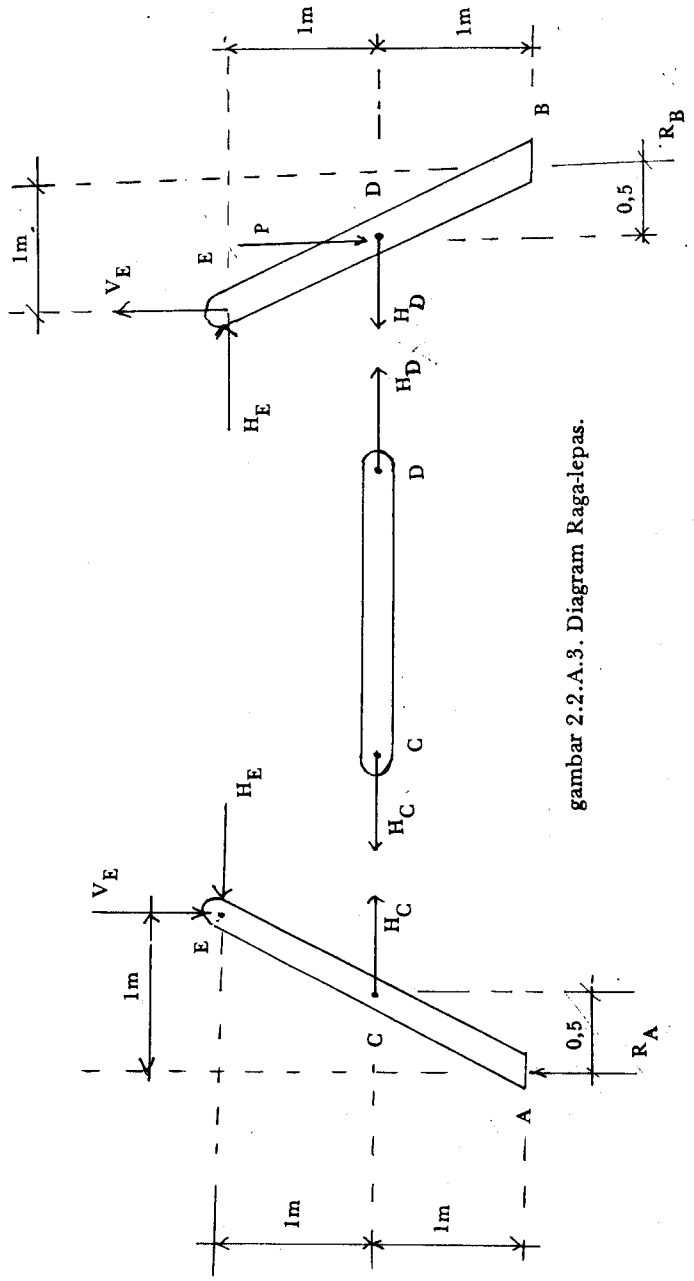
gambar 2.2.A.2

Selanjutnya marilah kita selidiki kejadian yang menyangkut hubungan antara batang AE, BE dan CD. Seperti juga halnya dengan keadaan setimbang yang dimiliki oleh setiap mata rantai dalam gambar 1.2.2 (Bab I), ketiga batang tersebut berada dalam keadaan setimbang karena adanya interaksi antara batang-batang tersebut di titik-titik hubungnya. (Bayangkanlah apa yang akan terjadi seandainya sendi-sendi penghubung di C, D dan E kita lepaskan).

Gaya aksi-reaksi pada titik-titik hubung tersebut merupakan *gaya-gaya-dalam* yang besarnya dapat kita tentukan dengan meninjau kesetimbangan gaya pada masing-masing batang sebagai suatu raga-lepas (lihat diagram raga-lepas dalam gambar 2.2.A.3). Perhatikanlah, bahwa di titik hubung C, D dan E tersebut *tidak terjadi momen dalam,* karena *sifat sendi yang tak dapat menahan momen.*

Raga-lepas CD: Yang terdapat pada raga-lepas CD ini hanyalah gaya sendi di C dan D. (Gaya lain tak ada karena berat batang diabaikan).Agar kedua gaya tersebut dapat saling mengimbangi, kedua gaya harus bekerja horizontal, sebutlah H_C sebagai gaya sendi di C dan H_D sebagai gaya sendi di D. Besar H_C dan H_D ini belum dapat ditentukan sementara ini, tapi arah kerja H_C dan H_D ini diperlukan dalam tinjauan kesetimbangan raga-lepas yang lain.

Raga-lepas AE : Gaya dalam pada sendi E yang belum diketahui arahnya itu, kita nyatakan saja dalam uraian vertikal (= V_E) dan uraian horizontal (= H_E). Dari tinjauan kesetimbangan raga-lepas AE ini kita peroleh :



gambar 2.2.A.3. Diagram Raga-lepas.

$$V_E = R_A = 10 \text{ kg } (\downarrow)$$

$$H_E = \frac{R_A\,(0{,}5) + V_E(0{,}5)}{1} = 10 \text{ kg } (\leftarrow)$$

$$H_C = H_E = 10 \text{ kg } (\rightarrow)$$

Dengan hukum Newton III dapat kita tentukan bahwa pada *raga-lepas CD,* H_C = 10 kg (←) — berlawanan arah dengan H_C pada raga-lepas AE — dan dari tinjauan kesetimbangan pada raga-lepas CD kita peroleh H_D = 10 kg (→).

Kembali pada hukum Newton III, kita tentukan gaya-gaya dalam raga-lepas BE sebagai berikut :

V_E = 10 kg (↑), berlawanan arah dengan V_E pada raga-lepas AE

H_E = 10 kg (→), berlawanan arah dengan H_E pada raga-lepas AE

H_D = 10 kg (←), berlawanan arah dengan H_D pada raga-lepas CD.

Nah, gaya-gaya V_E, H_E, H_D, P dan R_B pada raga-lepas BE harus membentuk kesetimbangan, kalau memang perhitungan kita ini tidak mengandung kesalahan. Jadi, tinjauan kesetimbangan pada raga-lepas BE dapat dipakai untuk memeriksa kembali seluruh hasil perhitungan kita, dari reaksi-reaksi tumpuan sampai gaya-gaya dalamnya.

Dari contoh 2.2.A di atas dapat kita sadari pentingnya diagram raga-lepas dalam peninjauan gaya-gaya-dalam suatu struktur. Tanpa diagram raga-lepas, kita tidak dapat menentukan gaya-gaya-dalam yang terjadi pada sendi C, D dan E. Lagipula, diagram raga-lepas ini dapat kita gunakan untuk memeriksa kembali hasil perhitungan kita, prinsip yang digunakan adalah :

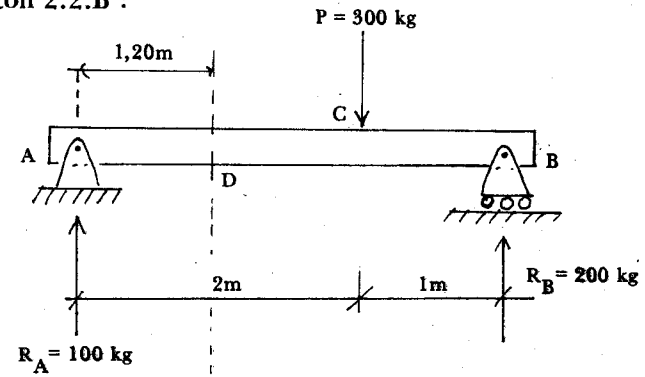
1. Setiap raga-lepas harus berada dalam keadaan setimbang.
2. Hukum Newton III harus ditaati.

Dalam contoh di atas, penentuan V_E, H_E dan H_D pada

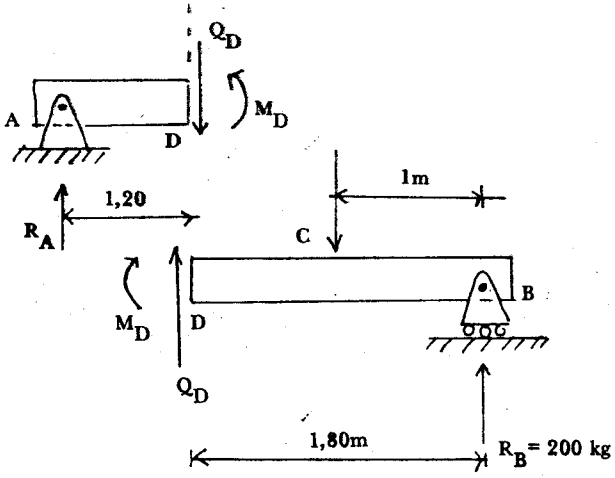
raga-lepas BE dilakukan dengan menggunakan hukum Newton III; dan pemeriksaan hasil perhitungan kita dapat dilakukan dengan menggunakan syarat-syarat kesetimbangan pada raga-lepas BE tersebut.

Diagram raga-lepas dapat kita gunakan juga dalam menentukan gaya-gaya-dalam di suatu penampang batang struktur (contoh 2.2.B).

Contoh 2.2.B :



gambar 2.2.B.1



gambar 2.2.B.2. Diagram raga-lepas.

Balok AB sepanjang 3 m, dengan beban terpusat P = 300 kg bekerja di titik C, 1 m dari B (gambar 2.2.B.1). Tumpuan balok di A adalah sendi sedangkan di B adalah rol.

Dari tinjauan kesetimbangan balok kita peroleh :

$R_A = 100$ kg (↑) dan $R_B = 200$ kg (↑).

Dan tinjauan kesetimbangan raga-lepas AD atau BD (gambar 2.2.B.2) misalnya, akan menghasilkan gaya-gaya-dalam yang bekerja pada penampang D.

Raga-lepas AD : Raga-lepas AD akan setimbang jika pada penampang D bekerja gaya-gaya-dalam :

$Q_D = R_A = 100$ kg (↑), dan
$M_D = R_A\ (\overline{AD}) = 100\ (1{,}2) = 120$ kgm ↷

Raga-lepas BD : Raga-lepas BD akan setimbang jika pada penampang D bekerja gaya-gaya-dalam :

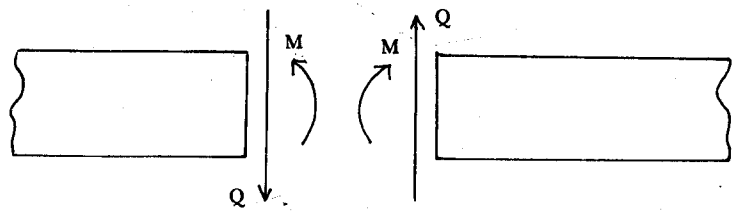
$Q_D = P - R_B = 300 - 200 = 100$ kg (↓), dan
$M_D = R_B\ (1{,}8) - P(0{,}8) = 120$ kgm ↶

Perhatikan bahwa Q_D dan M_D pada raga-lepas AD berlawanan arah dengan Q_D dan M_D raga-lepas BD; dan memang harus demikianlah keadaannya, karena Q_D dan M_D pada raga-lepas AD sesungguhnya merupakan aksi bagian BD terhadap bagian AD, sedangkan Q_D dan M_D pada raga-lepas BD merupakan aksi bagian AD terhadap bagian BD.

Gaya dalam Q_D disebut sebagai *gaya lintang* sedangkan M_D disebut sebagai *momen lentur*. (jenis gaya dalam yang lain, yaitu gaya aksial, telah kita jumpai dalam Bab I di muka, sebagai gaya-gaya-tarik dan tekan).

2.3. Perjanjian Tanda.

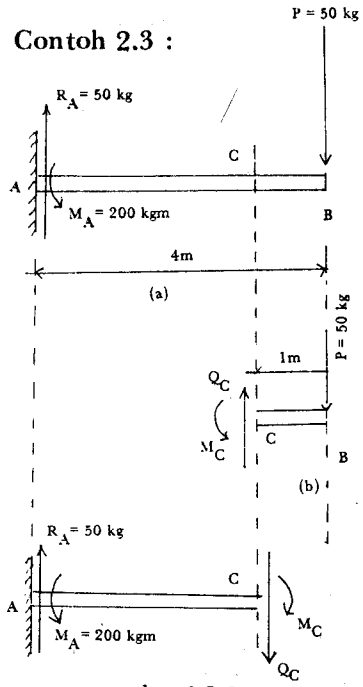
Dalam buku ini perjanjian tanda untuk gaya-gaya-dalam ditentukan sebagai berikut :



gambar 2.3.1

1. **Gaya lintang** : Tanda (+) harus diberikan kepada gaya lintang yang arah kerjanya sesuai dengan arah kerja Q dalam gambar 2.3.1.
2. **Momen lentur** : Tanda (+) harus diberikan kepada momen lentur yang arah kerjanya sesuai dengan arah kerja M dalam gambar 2.3.1.
3. **Gaya aksial** : Tanda (+) harus diberikan kepada gaya tarik dan tanda (−) kepada gaya tekan.

Contoh 2.3 :



gambar 2.3.2

Balok AB sepanjang 4 m, terjepit sempurna pada titik A. Beban terpusat P = 50 kg bekerja di titik B. Tentukan gaya-gaya-dalam yang bekerja di penampang C pada balok, pada jarak 1 m dari B.

Dari tinjauan kesetimbangan seluruh sistem kita peroleh : $R_A = P = 50$ kg (↑) dan $M_A = P(4) = 200$ kg kgm ↶.

Dari kesetimbangan raga-lepas BC *atau* AC kita peroleh :

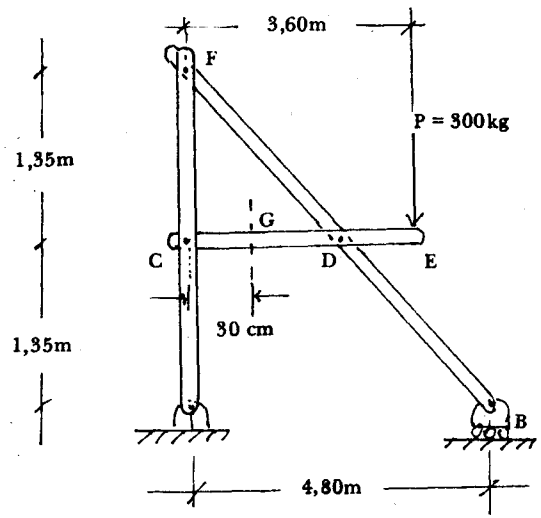
$Q_C = +P = +50$ kg.

$M_C = -P(1\text{m}) = -50$ kgm.

Catatan : R_A dan M_A dalam perhitungan di atas merupakan reaksi tumpuan jepit di A.
Sebagai gaya-gaya-dalam (pada penampang A) mereka harus dinyatakan dengan :
$Q_A = + R_A = + 50$ kg, dan $M_A = - 200$ kgm.

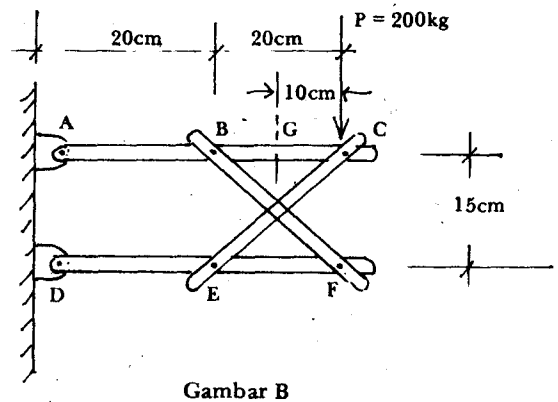
2.3. SL. SOAL LATIHAN

1. Bangunan dalam gambar A, terdiri dari batang AF, BF dan CE. Hubungan antar batang di C, D dan F merupakan hubungan sendi. Tumpuan A adalah sendi; Tumpuan B adalah rol. Beban terpusat vertikal P = 300 kg bekerja di E. Abaikanlah berat batang dan tentukan:
   a. Reaksi tumpuan di A dan B;
   b. Gaya sendi C, D dan F;
   c. Gaya lintang dan momen lentur pada penampang G (batang CE) yang berjarak 30 cm dari C.



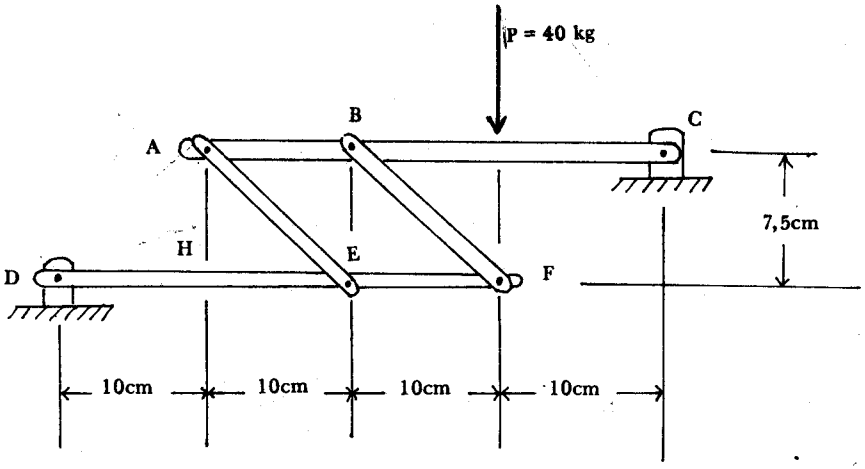
Gambar A

2. Bangunan yang terdiri dari batang AC, DF, BF dan CE (gambar B), bertumpu pada sendi A dan sendi D. Hubungan antar batang di B, C, E dan F merupakan hubungan sendi. Beban vertikal P = 200 kg bekerja di C. Abaikanlah berat batang dan tentukan :
   a. Reaksi tumpuan di A dan D;
   b. Gaya aksial yang diderita batang BF dan CE;
   c. Gaya lintang, momen lentur dan gaya aksial pada penampang G (batang AC) yang berjarak 10 cm dari C.
   d. Apakah yang terjadi jika batang BF dan CE dibuang dan sebagai gantinya, hanya dipasang batang CF saja ?



Gambar B

3. Bangunan dalam gambar C, terdiri dari batang AC, DF, AE dan BF. Hubungan antar batang di A, B, E dan F merupakan hubungan sendi. Tumpuan C dan D adalah tumpuan sendi. Beban terpusat P = 40 kg bekerja vertikal di G (batang AC). Abaikanlah berat batang dan tentukan :
   a. Reaksi tumpuan C dan D;
   b. Gaya aksial pada batang AE dan BF;
   c. Gaya lintang dan momen lentur pada penampang H (batang DF) yang berjarak 10 cm dari D.

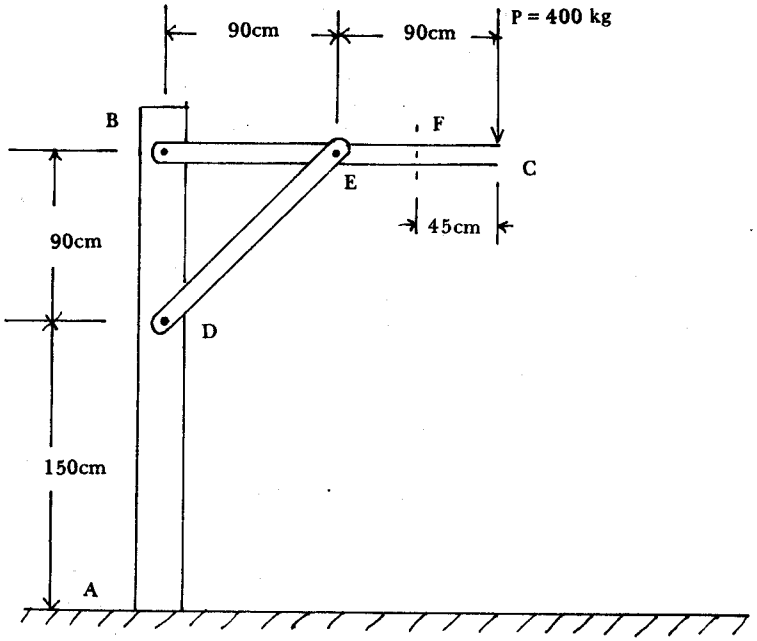


Gambar C

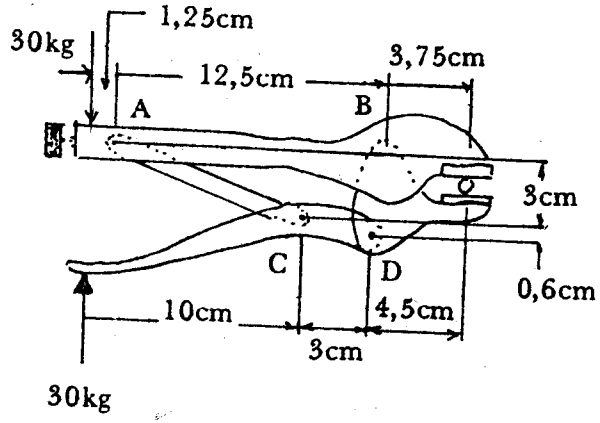
4. Bangunan dalam gambar D, terdiri dari batang AB, BC dan DE, dan memikul beban vertikal P = 400 kg di C. Hubungan antar batang di B, D dan E merupakan hubungan sendi. Batang AB terjepit secara sempurna di A. Abaikan berat batang dan tentukan :

   a. Reaksi tumpuan jepit di A;
   b. Gaya dalam sendi B, D dan E;
   c. Gaya lintang dan momen lentur pada penampang F (batang BC) yang berjarak 45 cm dari C.

5. Sebuah alat penjepit baut menjepit sebuah baut (gambar E). Berapakah gaya jepitan yang diderita baut, jika gaya yang bekerja pada kedua ujung pegangan alat penjepit tersebut adalah 30 kg ?



Gambar D



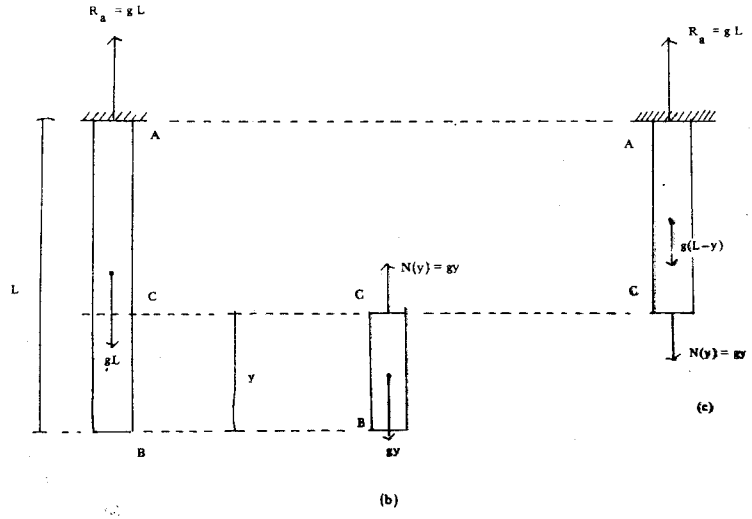
Gambar E

2.4. Diagram Momen Lentur, Gaya Lintang dan Gaya Aksial.

Marilah sekarang kita tinjau suatu batang prismatik AB yang dalam kedudukan vertikal menggantung di A (gambar 2.4.1.a). Berat batang AB adalah g per satuan panjang, panjang batang = L.

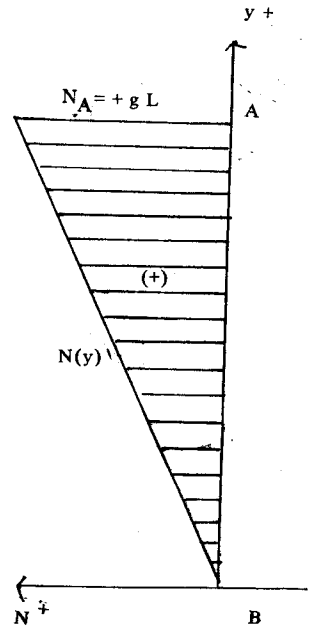
Berdasarkan kesetimbangan seluruh sistem, reaksi tumpuan di A adalah $R_A = g\,L$, karena gL adalah berat seluruh batang.

Dan dari diagram raga-lepas dalam gambar 2.4.1.b atau 2.4.1.c terlihat bahwa gaya aksial N(y) merupakan satu-satunya gaya dalam yang bekerja pada penampang sembarang C sejauh y dari B. Besar N(y) adalah gy, jadi merupakan fungsi jarak penampang terhadap B.



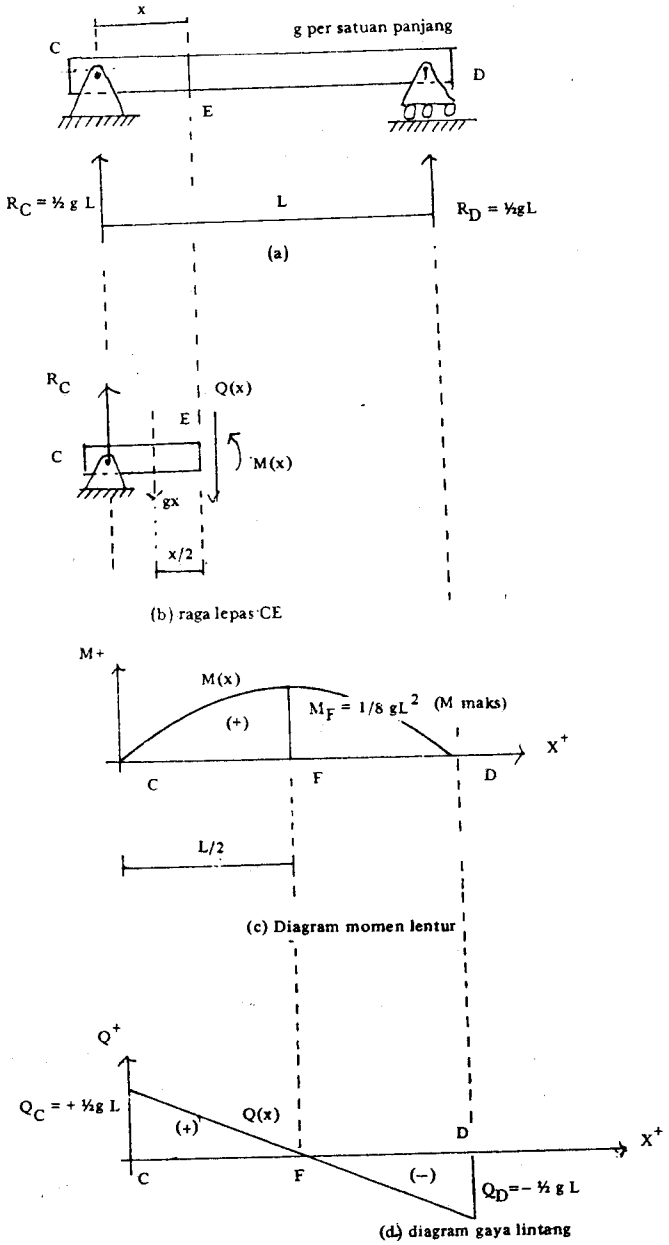
gambar 2.4.1

Grafik fungsi N(y) dapat kita gambarkan, dan hasilnya adalah suatu diagram (gambar 2.4.2) yang menunjukkan kepada kita setiap gaya aksial yang bekerja pada penampang-penampang batang AB, secara kuantitatif dan kualitatif. (Ingat, tanda (+) menunjukkan bahwa gaya aksial yang bersangkutan adalah gaya *tarik*). Diagram yang baru kita peroleh ini dinamakan : *diagram gaya aksial.*



Gambar 2.4.2. Diagram Gaya Aksial

Selanjutnya marilah kita tinjau balok CD yang bertumpu pada sendi C dan rol D (gambar 2.4.3.a). Panjang balok = L, sedangkan beratnya adalah g per satuan panjang.



gambar 2.4.3

Dari kesetimbangan seluruh sistem kita peroleh :
$R_C = \frac{1}{2}$ gL dan $R_D = \frac{1}{2}$ gL, karena berat balok adalah gL.

Kesetimbangan raga-lepas CE (gambar 2.4.3.b) menghasilkan gaya-gaya-dalam pada penampang sembarang E (jarak CE = x) sebagai berikut : M(x) = momen lentur di E = + $R_C x - (gx)(x/2) = \frac{1}{2}gLx - \frac{1}{2}gx^2$, dan Q(x) = gaya lintang di E = $R_C - gx = \frac{1}{2}gL - gx$.

Grafik fungsi M(x) dan Q(x) dapat kita gambarkan sehingga diperoleh *diagram momen lentur* (gambar 2.4.3.c) dan *diagram gaya lintang* (gambar 2.4.3.d), yang masing-masing menunjukkan momen lentur dan gaya lintang yang terjadi di setiap penampang pada batang CD, baik secara kuantitatif maupun secara kualitatif (Ingat arti tanda (+) dan (−) bagi masing-masing jenis gaya dalam tersebut).

Penunjukan gaya-gaya-dalam dengan cara grafik di atas merupakan cara sederhana untuk mengetahui *semua* gaya dalam yang bekerja di *setiap* penampang batang yang kita tinjau. Gaya-gaya-dalam maksimum, yang sangat diperlukan dalam perancangan, dapat langsung terbaca dari diagram gaya dalam yang bersangkutan, baik besar maupun tempat terjadinya.

Sebagai contoh, kita lihat saja diagram gaya aksial dalam gambar 2.4.2 di muka. Dari diagram tersebut dapat kita ketahui bahwa gaya tarik maksimum terjadi di penampang A pada batang yang bersangkutan, yaitu sebesar gL.

Atau pada tinjauan batang CD (gambar 2.4.3) diagram momen lentur menunjukkan momen lentur maksimum sebesar $M_F = + 1/8\ gL^2$ yang terjadi di penampang F (tengah-tengah bentang) pada batang CD; sedangkan diagram gaya lintang menunjukkan gaya lintang positif maksimum (Q^+ maks) sebesar + ½gL yang terjadi di penampang C dan gaya lintang negatif maksimum (Q^- maks) sebesar − ½gL yang terjadi di penampang D (pada batang CD).

Penentuan gaya-gaya-dalam maksimum sebagai harga-harga ekstrim fungsi yang bersangkutan, dapat kita lakukan dengan bantuan beberapa theorema kalkulus berikut :

Thm 1. Misalkan fungsi f kontinu pada selang tertutup [a, b] dan dapat diturunkan pada selang terbuka (a,b) :

1.1. Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x dalam selang terbuka (a,b), maka harga f menaik pada selang tertutup [a,b].

1.2. Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap x dalam selang terbuka (a,b), maka harga f menurun pada selang tertutup [a,b].

Thm 2. Jika f(x) mempunyai harga pada setiap x dalam selang terbuka (a,b) dan f punya harga ekstrim di $x = c$, dengan $a < c < b$, maka jika $f'(c)$ ada, $f'(c) = 0$.

Thm 3. Jikafungsi f kontinu pada selang tertutup [a,b] maka f punya harga maksimum dan harga minimum pada selang tertutup [a,b].

Selanjutnya perlu anda perhatikan bahwa fungsi gaya-gaya-dalam tidaklah selalu kontinu pada seluruh bagian balok seperti yang akan anda lihat pada contoh berikut (gambar 2.4.4) :

Balok EF sepanjang 4 m, terletak di atas tumpuan sendi dan rol, memikul beban terpusat P = 200 kg di G pada jarak 3 m dari E atau pada jarak 1 m dari F. Untuk penyederhanaan masalah, berat balok EF diabaikan.

Dari kesetimbangan seluruh sistem diperoleh :

$R_E = \frac{1}{4}(200) = 50$ kg dan $R_F = \frac{3}{4}(200) = 150$ kg.

Dan untuk menentukan fungsi gaya-gaya-dalam balok EF tersebut, kita tentukan sistem koordinat Cartesian dengan E sebagai titik pangkalnya dan arah x positif ke kanan. Maka dalam sistem koordinat Catesian tersebut, fungsi gaya-gaya-dalam balok EF adalah sebagai berikut :

Fungsi momen lentur :

Bagian EK, $0 \leq x \leq 3$ (gambar 2.4.4.b) :

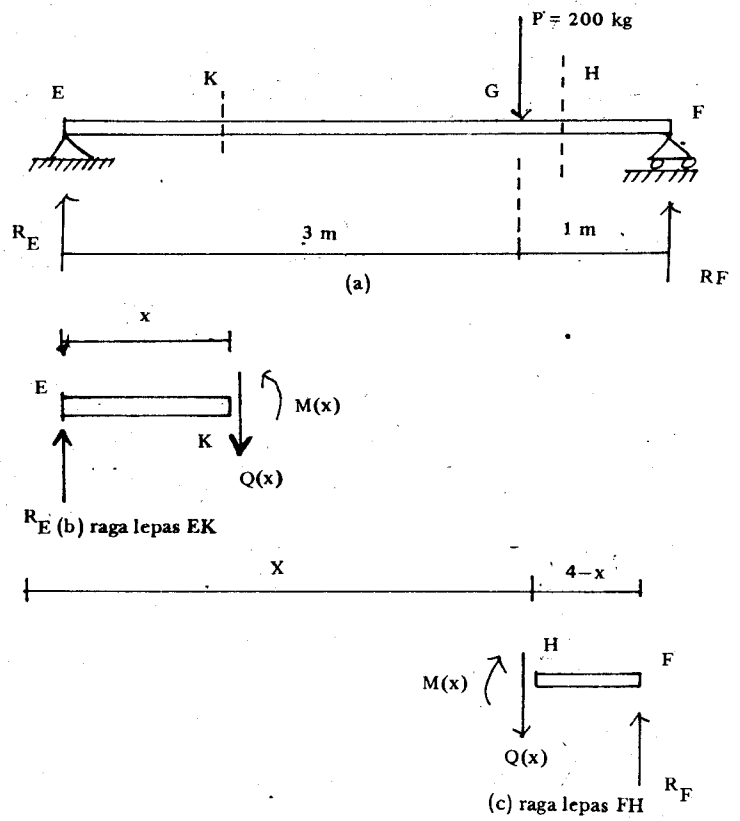
$M(x) = R_E x = 50\,x$, kontinu pada selang tertutup [0,3].

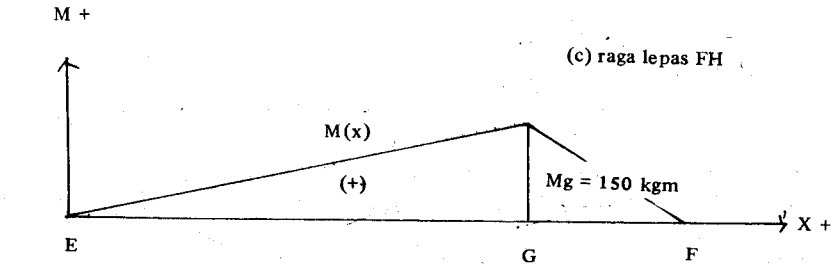
$M'(x) = 50 > 0$ untuk setiap x dalam selang terbuka (0,3), berarti M menaik pada selang tertutup [0,3]

Bagian HF, $3 < x \leq 4$ (gambar 2.4.4.c) :

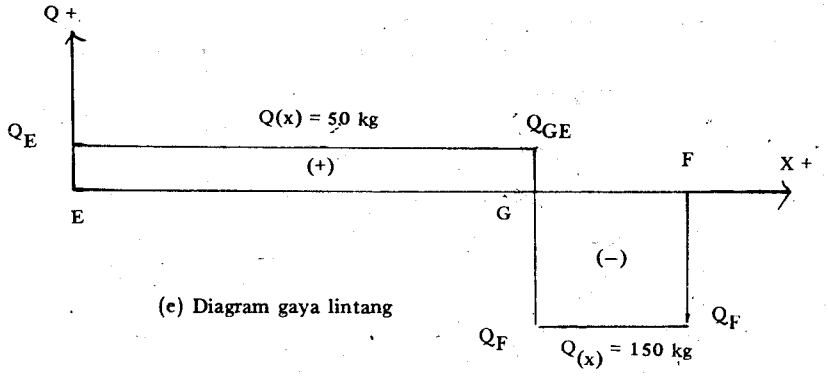
$M(x) = R_F\,(4 - x) = 150(4 - x) = 600 - 150x$, kontinu pada (3,4].

$M'(x) = -150 < 0$ untuk setiap x dalam (3,4)., berarti M menurun pada (3,4].





(d) Diagram momen lentur



(e) Diagram gaya lintang

gambar 2.4.4

Di x = 3, M tak dapat diturunkan. Tapi M menaik pada [0,3] dan M menurun pada (3,4], maka :
Di x = 3, M (3) = 50(3) = 150 kgm merupakan harga M maksimum.
Di x = 0, M (0) = 0 dan di x = 4, M(4) = 600 – 150 (4) = 0 merupakan harga-harga M minimum.
Gambar grafik M (x) terlihat pada gambar 2.4.4.d.

Fungsi gaya lintang :

Bagian EK, $0 \leqslant x \leqslant 3$ (gambar 2.4.4.b) :

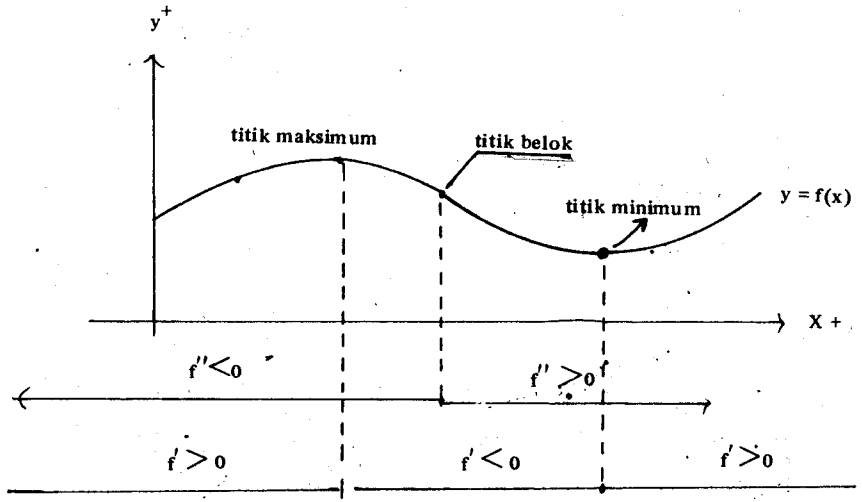
$Q(x) = + R_E = + 50$ kg

Bagian HF, $3 < x \leqslant 4$ (gambar 2.4.4.c) :

$Q(x) = - R_F = - 150$ kg.

Gambar grafik Q(x) terlihat pada gambar 2.4.4.e.

Catatan :
1. Untuk selanjutnya, fungsi momen lentur akan selalu dinyatakan dengan M(x), fungsi gaya lintang dengan Q(x) dan fungsi gaya aksial dengan N(x).
2. Kelengkungan grafik fungsi non-linier, tentu saja dapat ditentukan dengan melihat harga turunan keduanya (f"). Untuk penyegaran, lihatlah gambar 2.4.5 di bawah ini :



gambar 2.4.5

2.5. Hubungan Matematikal antara q(x), Q(x) dan M(x).

Penentuan fungsi gaya lintang (dan kadang-kadang juga momen lentur) akan menjadi lebih mudah apabila hubungan matematikal antara q (fungsi beban terbagi rata), Q dan M diketahui. Hubungan matematikal tersebut tentu saja akan tergantung kepada sistem koordinat Cartesian yang kita pilih.

Berikut ini akan kita buktikan bahwa (fungsi-fungsi Q dan M diandaikan kontinu dan dapat diturunkan)

a. Jika *sumbu x* dalam sistem koordinat Cartesian yang bersangkutan ditentukan *positif ke arah kanan* (harga x bertambah besar ke kanan) maka:

$$Q' = -q \quad \text{dan} \quad M' = Q$$

b. Jika *sumbu x* dalam sistem koordinat Cartesian yang bersangkutan ditentukan *positif ke arah kiri* (harga x bertambah besar ke kiri) maka :

$$Q' = q \quad \text{dan} \quad M' = -Q$$

Bukti :

a. **Sumbu x positif ditentukan ke kanan.**

Tinjaulah balok AB yang bertumpu pada sendi A dan rol B, serta memikul beban terbagi q(x) per satuan panjang (gambar 2.5.1.a), dan kemudian tentukanlah penampang sembarang C dan D pada balok yang berjarak Δx satu terha terhadap yang lain. Gaya lintang dan momen lentur pada penampang C, masing-masing akan dinyatakan ddengan Q(x) dan M(x) – keduanya diasumsikan sebagai gaya-gaya-dalam positif – sedangkan gaya lintang dan momen lentur pada penampang D akan dinyatakan dengan Q(x + Δx) dan M(x + Δx).

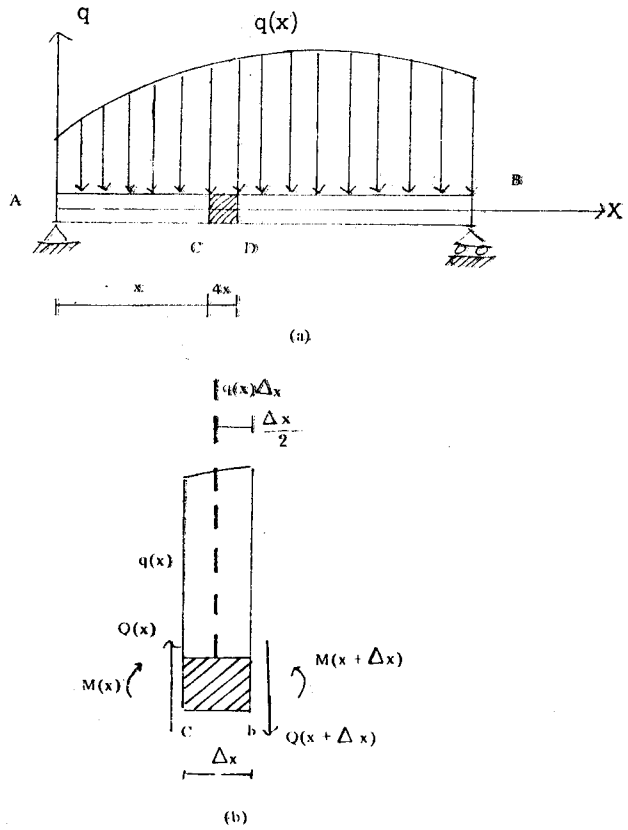
Sekarang, "pisahkan" lah bagian balok CD tersebut dan tinjaulah ia sebagai suatu raga-lepas (gambar 2.5.1.b). Gaya-gaya yang bekerja pada raga-lepas ini adalah : Beban luar sebesar $q(x_o)\Delta x$, dengan x_o merupakan sebuah titik dalam selang [x, x + Δx] (ingatlah teorema nilai rata-rata untuk integral), gaya lintang serta momen lentur pada penampang C dan D.

Dari syarat kesetimbangan : Jumlah gaya-gaya vertikal = 0, kita peroleh :

$$Q(x + \Delta x) + q(x_o)\Delta x - Q(x) = 0$$

$$\frac{Q(x + \Delta x) - Q(x)}{\Delta x} = -q\,(x_o)$$

ambil limitnya untuk $\Delta x \to 0$, maka $x_o \to x$, dan akhirnya kita peroleh : $Q'(x) = -q(x)$, jika fungsi Q dapat diturunkan di x, tentu saja. (2.5.1)



gambar 2.5.1

Dan dari syarat kesetimbangan : jumlah momen terhadap D sama dengan nol kita peroleh :

$$M(x) + Q(x)\Delta x - q(x_o) \cdot \Delta x.\frac{\Delta x}{2} - M(x + \Delta x) = 0$$

$$Q(x) - q(x_o)\frac{\Delta x}{2} = \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x}$$

Ambil limitnya untuk $\Delta x \to 0$, akan kita peroleh :

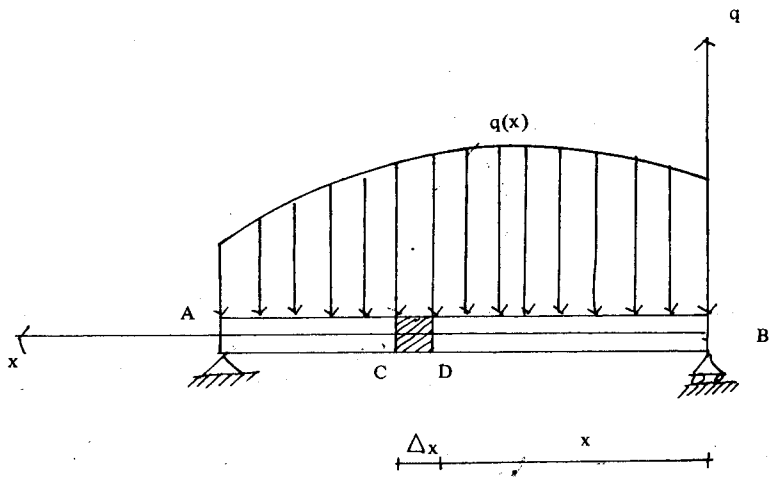
$$Q(x) = M'(x) \qquad (2.5.2)$$

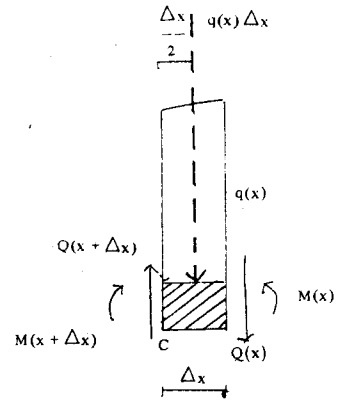
Jika M dapat diturunkan di x.

b. Sumbu x positif ditentukan ke kiri.

Sekarang, sistem koordinat Cartesian pada balok AB di atas kita ubah, menjadi seperti pada gambar 2.5.2.a. Gaya lintang dan momen lentur pada penampang D menjadi Q(x) dan M(x), sedangkan pada penampang C menjadi $Q(x + \Delta x)$ dan $M(x + \Delta x)$.

Bagian balok CD juga sekarang kita pisahkan sebagai suatu raga-lepas (gambar 2.5.2.b). Dan gaya-gaya yang bekerja pada raga-lepas ini tentu saja adalah beban luar sebesar $q(x_o)\Delta x$ dan gaya lintang serta momen lentur pada penampang C dan D.





gambar 2.5.2.

Dari syarat kesetimbangan : jumlah gaya-gaya vertikal = 0 kita peroleh

$$Q(x + \Delta x) - Q(x) - q(x_o)\Delta x = 0$$

bagi dengan Δx dan ambil limitnya untuk $\Delta x \to 0$ akan kita peroleh $Q'(x) = q(x)$ jika Q dapat diturunkan. (2.5.3)

Dan dari syarat kesetimbangan : jumlah momen terhadap C sama dengan nol kita peroleh :

$$M(x) - Q(x)\,\Delta x - q(x_o)\,\Delta x.\,\Delta x/2 - M(x + \Delta x) = 0$$

$$-Q(x) - \tfrac{1}{2}q(x_o)\,\Delta x = \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x}$$

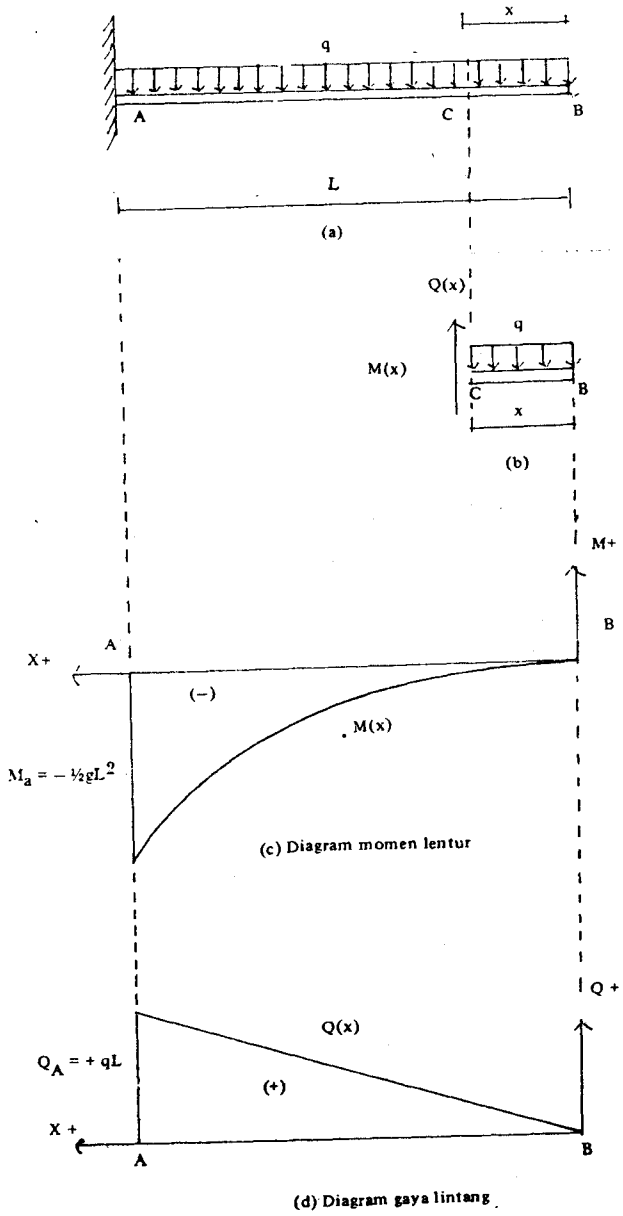
ambil limitnya untuk $\Delta x \to 0$

$$M'(x) = -Q(x)$$

Jika M dapat diturunkan (2.5.4)

Contoh 2.5.A :

Balok terjepit sebelah (gambar 2.5.A.1.a), panjangnya L, memikul beban terbagi rata sebesar q per satuan panjang. Tentukanlah diagram momen lentur dan gaya lintangnya.



gambar 2.5.A.1

Solusi :

Titik B kita jadikan titik pangkal koordinat Cartesian; maka :

$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2$, kontinu pada selang tertutup [0,L).

$M'(x) = -qx < 0$ untuk setiap x dalam selang terbuka (0,L); berarti harga M menurun pada selang tertutup [0,L], atau di x = 0, $M(0) = M_B = 0$ merupakan harga M maksimum dan di x = L, $M(L) = M_A = -\frac{1}{2}qL^2$ merupakan harga M minimum pada selang tertutup [0,L].

Grafik M(x) dapat digambarkan seperti terlihat pada gambar 2.5.A.l.c, dan M_A boleh disebut sebagai : momen negatif maksimum ($M^-_{maksimum}$)

Hubungan matematikal antara Q(x) dan M(x) seperti yang telah dibuktikan di muka dapat kita gunakan untuk menentukan fungsi gaya lintang, yang dalam sistem koordinat Cartesian kita sekarang ini (sumbu x positif ke arah kiri) adalah : $M'(x) = -Q(x)$ atau, $Q(x) = -M'(x)$.

$Q(x) = -M'(x) = +qx$, kontinu pada selang tertutup [0,L] *.

$Q'(x) = +q > 0$ untuk setiap x dalam selang terbuka (0,L); berarti harga Q menaik pada selang tertutup [0,L], atau di x = 0, $Q(0) = Q_B = 0$ merupakan harga Q minimum, dan di x = L, $Q(L) = Q_A = +qL$ merupakan harga Q maksimum pada selang tertutup [0,L].

Grafik Q (x) dapat digambarkan seperti terlihat pada gambar 2.5.A.1.d, dan Q_A dapat disebut sebagai : gaya lintang positif maksimum ($Q^+_{maksimum}$)

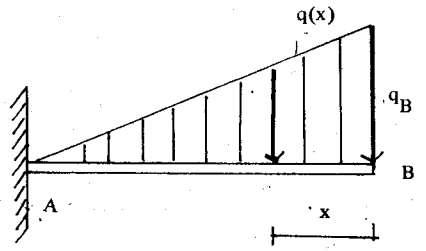
*Catatan : Jika suatu fungsi f kontinu pada selang tertutup [a, b] dan dapat diturunkan pada selang terbuka (a,b), maka turunan f di titik-titik ujung selang [a, b] kita tentukan sebagai berikut :

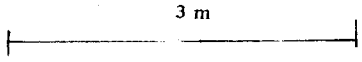
$$f'(a) = f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$ turunan dari kanannya;

$$f'(b) = f'_{-}(b) = \lim_{x \to b^{-}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b},$$ turunan dari kirinya.

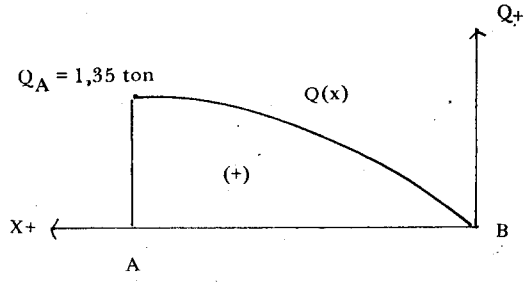
Contoh 2.5.B : "Beban Segitiga" pada Balok Terjepit Sebelah.

Panjang balok adalah 3 m dan q_B = "beban garis" pada B = 0,9 t/m' (gambar 2.5.B.1.a). Tentukanlah diagram momen lentur dan gaya lintang balok tersebut, akibat "beban segitiga" yang bersangkutan (Berat balok diabaikan).

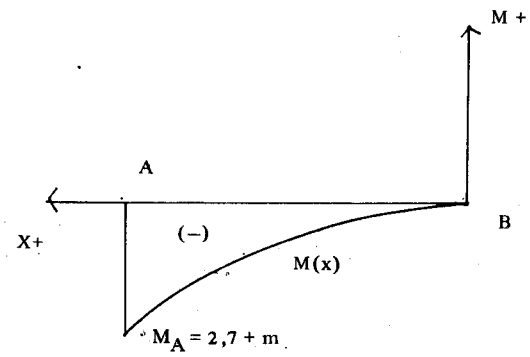




(a)



(b) Diagram gaya lintang



(c) Diagram momen lentur

gambar 2.5.B.1

Solusi :

Titik B kita tentukan sebagai titik pangkal koordinat Cartesian, maka '

Fungsi beban pada balok adalah :

$$q(x) = \frac{3 - x}{3}(0,9) = 0,9 - 0,3x$$

Fungsi gaya lintang, Q(x) dapat ditentukan dengan menggunakan hubungan matematikal antara q(x) dan Q(x), yang dalam hal ini (menurut penjelasan di muka) adalah : $Q'(x) = q(x)$ atau $Q(x) = \int q(x)\,dx$,

$$Q(x) - Q(0) = \int_0^x q(t)\,dt = 0,9\,x - 0,15x^2$$

Tapi $Q(0) = Q_B = 0$, sehingga $Q(x) = 0,9x - 0,15x^2$.

Fungsi Q kontinu pada selang tertutup [0,3] dan
$Q'(x) = 0,9 - 0,3x > 0$ untuk setiap x dalam selang terbuka (0,3) ; berarti harga Q menaik pada [0,3].

Di $x = 0$, $Q(0) = Q_B = 0$ dan di $x = 3$, $Q(3) = Q_A = 0{,}9(3) - 0{,}15\,(3)^2 = 1{,}35$ ton.
Grafik Q(x) dapat digambarkan seperti terlihat pada gambar 2.5.B.1.b. (cekung ke atas karena $Q''(x) = -0{,}3 < 0$)
Hubungan matematikal antara Q(x) dan M(x) dalam hal ini adalah :

$$M'(x) = -Q(x) \quad \text{atau} \quad M(x) = -\int Q(x)\,dx$$

$$M(x) - M(0) = -\int_0^x Q(t)\,dt = 0{,}45x^2 + 0{,}05x^3$$

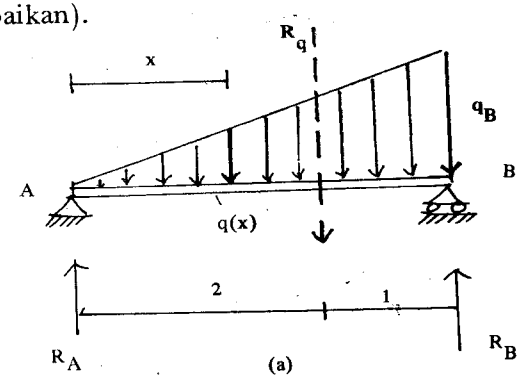
Tapi $M(0) = M_B = 0$, sehingga $M(x) = -0{,}45x^2 + 0{,}05x^3$.
$M'(x) = -0{,}9x + 0{,}15x^2 < 0$ untuk setiap x dalam (0,3); berarti harga M menurun pada selang tertutup [0,3].
Di $x = 0$, $M(0) = M_B = 0$ dan di $x = 3$, $M(3) = M_A = -0{,}45(3)^2 + 0{,}05(3)^3 = -2{,}7$ tm.

Grafik M(x) dapat digambarkan seperti terlihat pada gambar 2.5.B.1.c. (cekung ke atas karena $M''(x) = -0{,}9 + 0{,}3x < 0$ untuk $0 < x < 3$)

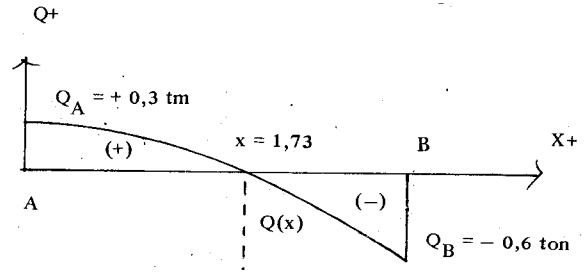
Contoh 2.5.C : "Beban Segitiga" pada Balok di atas Tumpuan Sendi dan Rol.

Panjang balok = 3 m, q_B = "beban garis" pada B = 0,6 t/m'.

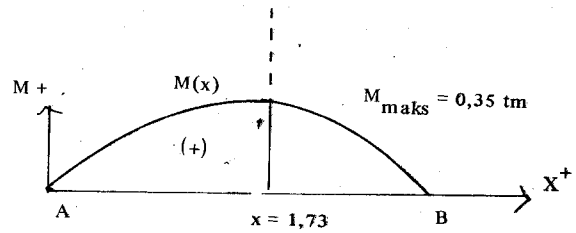
Tentukan diagram momen lentur dan gaya lintang balok tersebut, akibat "beban segi-tiga" yang bersangkutan. (Berat balok diabaikan).



(a)



(b) Diagram gaya lintang



(c) Diagram momen lentur

gambar 2.5.C.1

Solusi :

R_q = resultan beban = ½(0,6)(0,3) = 0,9 ton, bekerja pada jarak 1 m dari B sehingga : $R_A = 1/3(0{,}90) = 0{,}3$ ton dan $R_B = 2/3(0{,}9) = 0{,}6$ ton.
Titik A kita tentukan sebagai titik pangkal sistem koordinat Cartesian, maka :
$q(x) = x/3(0{,}6) = 0{,}2x$, kontinu pada selang tertutup [0,3].
Hubungan matematikal antara q(x) dan Q(x) dalam sistem koordinat Cartesian yang kita akan gunakan adalah : $Q'(x) = -q(x)$, atau $Q(x) = -\int q(x)\,dx$.

Maka : $Q(x) - Q(0) = -\int_0^x q(t)\,dt = -0{,}1x^2$.
Sedangkan $Q(0) = Q_A = + R_A = + 0{,}3$; sehingga $Q(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}3$.

Dan grafik Q(x) dapat digambarkan seperti dalam gambar 2.5.C.1.b.

Hubungan matematikal antara Q(x) dan M(x) dalam sistem koordinat Cartesian ini adalah : M'(x) = Q(x) atau M(x) = $\int Q(x)\,dx$.

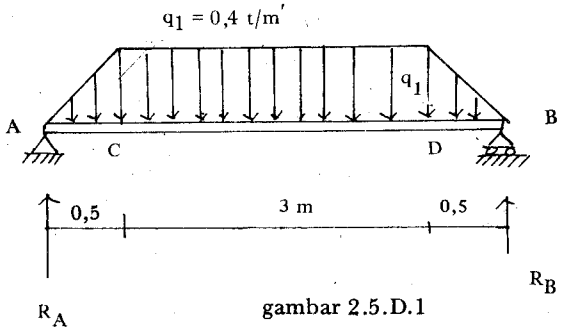
$$M(x) - M(0) = \int_0^x Q(t)\,dt = -\frac{1}{30}x^3 + 0{,}3x$$

Sedangkan M(0) = M_A = 0; sehingga M(x) = $-\,1/30x^3 + 0{,}3x$

Dan grafik M(x) dapat digambarkan seperti dalam gambar 2.5.C.1.c.

Contoh 2.5.D : "Beban Trapesium" pada Balok di atas Tumpuan Sendi dan Rol.

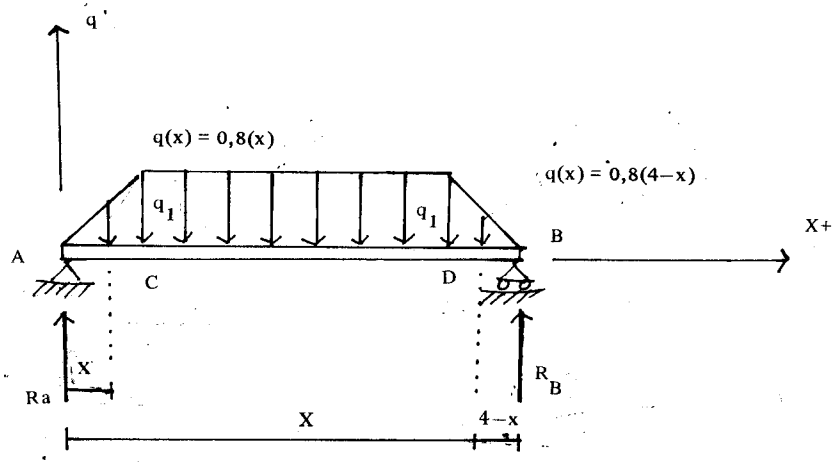
Panjang balok = 4 m, AC = DB = 0,5 m.
q_1 = "beban garis" sepanjang CD = 0,4 t/m'
Tentukan diagram gaya lintang dan momen lentur balok tersebut, akibat "beban trapezium" yang bersangkutan. (Berat balok diabaikan).



gambar 2.5.D.1

Solusi :

$R_A = R_B$ = setengah luas bidang beban = 0,7 ton.
Kemudian titik A kita tentukan sebagai titik pangkal sistem koordinat Cartesian yang kita gunakan (gambar 2.5.D.2).



gambar 2.5.D.2

Bagian AC, $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$:

$$q(x) = \frac{x}{0{,}5}q_1 = 0{,}8x$$

$$Q(x) = -\int q(x)\,dx$$

$$Q(x) - Q(0) = -\int_0^x q(t)\,dt = -0{,}4x^2$$

Sedangkan $Q(0) = Q_A = +R_A = +0{,}7$, sehingga

$$Q(x) = -0{,}4x^2 + 0{,}7$$

$$M(x) = \int Q(x)\,dx$$

$$M(x) - M(0) = \int_0^x Q(t)\,dt$$

$$= -\frac{0{,}4}{3}x^3 + 0{,}7x$$

Sedangkan $M(0) = M_A = 0$, sehingga

$$M(x) = -\frac{0{,}4}{3}x^3 + 0{,}7x$$

Bagian CD, $0,5 < x \leqslant 3,5$:

$q(x) = q_1 = 0,4$

$Q(x) = -\int q(t)\,dt$

$$Q(x) - Q(0,5) = -\int_{0,5}^{x} q(t)\,dt = -0,4x + 0,2$$

Sedangkan $Q(0,5) = -0,4(0,5)^2 + 0,7 = 0,6$, sehingga $Q(x) = -0,4x + 0,8$

$M(x) = \int Q(x)\,dx$

$$M(x) - M(0,5) = \int_{0,5}^{x} Q(t)\,dt$$

$$= [-0,2t^2]_{0,5}^{x} + [0,8t]_{0,5}^{x}$$

$$= -0,2x^2 + 0,8x - 0,35$$

Sedangkan $M(0,5) = -\frac{0,4}{3}(0,5)^3 + 0,7(0,5) =$

$$= 0,333$$

Maka $M(x) = -0,2x^2 + 0,8x - 0,017$

Bagian DB, $3,5 < x \leqslant 4$:

$$q(x) = \frac{4-x}{0,5}\, q_1 = 0,8(4 - x) = 3,2 - 0,8x$$

$Q(x) = -\int q(x)\,dx$

$$Q(x) - Q(3,5) = -\int_{3,5}^{x} q(t)\,dt =$$

$$= [-4t^2]_{3,5}^{x} - [3,2t]_{3,5}^{x}$$

$$= 0,4x^2 - 3,2x + 6,3$$

Sedangkan $Q(3,5) = -0,4(3,5) + 0,8 = -0,6$, sehingga $Q(x) = 0,4x^2 - 3,2x + 5,7$

di $x = 4$, $Q(4) = 0,4(4)^2 - 3,2(4) + 5,7 = -0,7$

$M(x) = \int Q(x)\,dx$

$$M(x) - M(3,5) = \int_{3,5}^{x} Q(t)\,dt$$

$$= \frac{0,4}{3}x^3 - 1,6x^2 + 5,7x$$

$$= 6,067$$

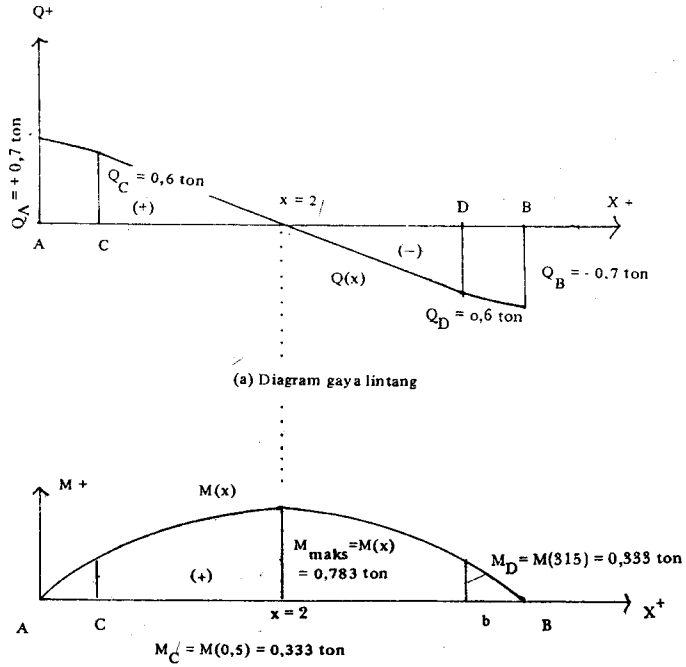
Sedangkan $M(3,5) = -0,2(3,5)^2 + 0,8(3,5) - 0,017$

$= 0,333$ sehingga

$$M(x) = \frac{0,4}{3}x^3 - 1,6x^2 + 5,7x - 5,734$$

di $x = 4$, $M(4) = 0$

Dengan didapatkannya fungsi gaya lintang dan momen lentur pada setiap bagian balok AB di atas, diagram gaya lintang dan momen lentur dapat digambarkan seperti terlibat pada gambar 2.5.D.3.a dan 2.5.D.3.b.



(a) Diagram gaya lintang

(b) Diagram momen lentur

gambar 2.5.D.5

Contoh 2.5.E : Dua Beban Terpusat yang Sama Besar dan Berkedudukan Simetrik pada Balok di atas Tumpuan Sendi dan Rol.

Kedudukan tanpak pada gambar 2.5.E.1.a, berat balok diabaikan.

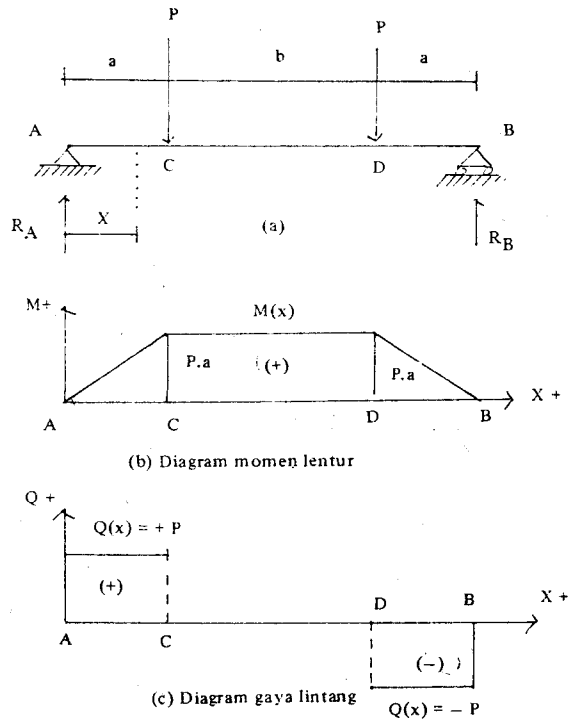
AC =DB =a, CD =b.

Tentukan diagram momen lentur dan gaya lintang balok yang bersangkutan.

Solusi :

$R_A = R_B = P$.

Titk A kita tentukan sebagai titik pangkal koordinat Cartesian, maka.



gambar 2.5.E.1

Bagian AC, $0 \leqslant x \leqslant a$:

$M(x) = R_A x = Px$

di $x = a$, $M(a) = M_C = P\,a$.

$Q(x) = M'(x) = +P$. (*)

Bagian CD, $a < x \leqslant (a + b)$:

$M(x) = R_A x - P(x - a) = P\,a$.

$Q(x) = M'(x) = 0$ (*)

Bagian DB, $(a + b) < x \leqslant (2a + b)$:

$M(x) = R_B\,(2a + b - x) = P(2a + b - x)$.

di $x = (2a + b)$, $M(2a + b) = M_B = 0$

$Q(x) = M'(x) = -P$. (*)

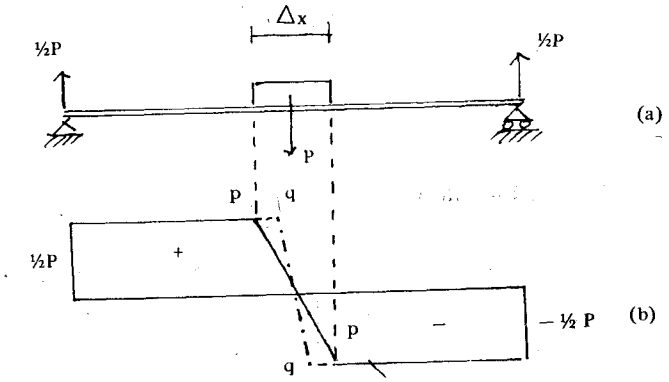
Diagram momen lentur dan gaya lintang dapat digambarkan (gambar 2.5.E.1.b dan 2.5.E.1.c).

(*) Catatan :

Berdasarkan ketentuan yang kita tetapkan pada catatan contoh 2.5.A, di $x = a$ atau di $x = a + b$ kita bisa mendapatkan nilai Q yang berbeda, bergantung pada tinjauan selang yang kita pilih untuk menentukan fungsi M. Hal ini tentu saja tidak boleh terjadi, dan memang demikian karena, walaupun M kontinu pada seluruh selang $[0, a + 2b]$, M tidak dapat diturunkan baik di $x = a$ maupun di $x = a + b$ (turunan dari kirinya tidak sama dengan turunan dari kanannya), jadi hubungan matematikal $M'(x) = Q(x)$ tidak berlaku.

Jadi, berapa persisnya gaya-lintang di situ kita tidak tahu. Tidak jadi soal, karena mana ada sih gaya *terpusat* semacam itu! Sebab, betapapun terpusatnya suatu gaya atau beban, ia mesti punya tempat "berpijak", katakanlah sebesar Δx, jika Δx cukup kecil maka cukup bijaksanalah jika kita pandang beban yang bersangkutan sebagai bersifat merata sepanjang Δx, karena sangat tidak praktis untuk memandang berat orang yang berdiri di atas jembatan panjang sebagai beban merata selebar sepatunya, bukan ?

Nah, kalau persisnya kita tidak tahu, perkiraannya mesti kita cari. Hal ini tidak sulit jika kita pandang beban terpusat sebagai beban merata sepanjang Δx yang kecil sekali. Dari contoh-contoh sebelumnya dapat kita turunkan diagram gaya lintang bangunan seperti gambar 2.5.E.2 di bawah ini :

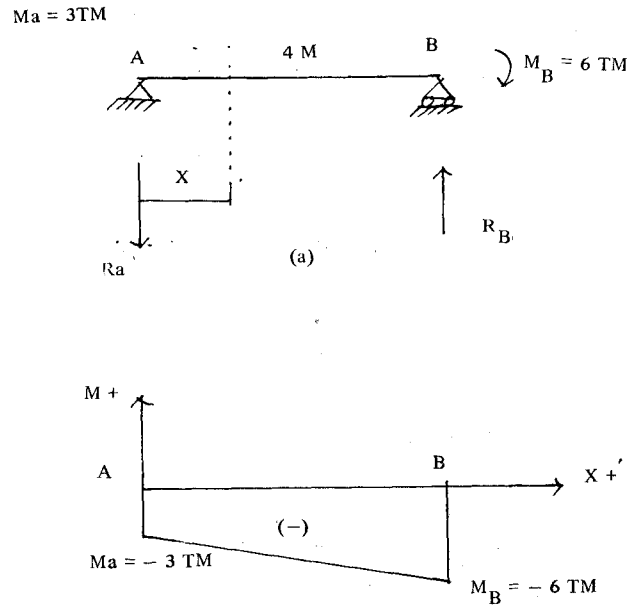


gambar 2.5.E.2

Kemudian, bayangkanlah apa yang terjadi jika $\Delta x \to 0$, tentu garis miring p-p akan "menjadi" garis miring q-q, semakin kecil Δx akan semakin tegaklah garis q-q (gambar 2.5.E.2.b).

Jadi, meskipun kita tidak tahu persis besarnya gaya lintang di titik tempat bekerjanya beban "terpusat" P, tetapi kita tahu bahwa harganya terletak di antara besarnya kedua gaya lintang di kiri kanan titik yang bersangkutan.

Begitulah, kepersisan memang sukar diukur. Jam mutakhir mampu mencatat bahwa suatu tabrakan mobil terjadi antara pukul 0,00 . . . 01 dan pukul 0,00 . . . 02, tapi berapa *persisnya* ? Tiada yang tahu, karena antara kedua bilangan itu ada *tak* hingga banyaknya bilangan lain, padahal kita yakin benar bahwa mereka pasti mulai bersentuhan pada pukul X, *persis !* nah!



(b) Diagram momen lentur

Balok AB di atas tumpuan sendi dan rol (gambar 2.5.F.1.a) dengan momen M = 3 tm) yang bekerja di B. Panjang balok = 4 m. Tentukan diagram momen lentur dan gaya lintang balok AB, jika berat balok sendiri diabaikan.

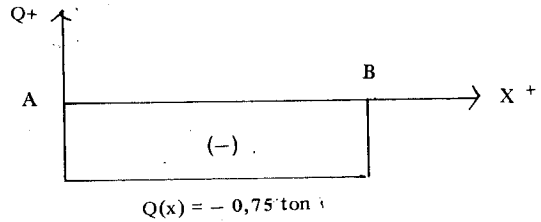
Solusi :

$R_A = ¾ = 0{,}75$ ton (↓). $R_B = ¾ = {,}75$ ton (↑).

Titik A kita jadikan titik pangkal koordinat Cartesian, maka:
$M(x) = - R_A x = -0{,}75\ x.$

$Q(x) = M(x) = -0{,}75.$

Grafik M(x) dan Q(x) masing-masing terlihat pada gambar 2.5.F.1.b dan 2.5.F.1.c.



(c) Diagram gaya lintang

gambar 2.5.F.1

Contoh 2.5.G : Momen Luar Bekerja di Kedua Ujung Balok.

Balok AB di atas tumpuan sendi dan rol (gambar 2.5.G.1.a), panjang balok = 4 m. M_A = 3 tm ↻, bekerja di A. M_B = 6 tm ↺, bekerja di B. Tentukan diagram momen lentur dan gaya lintang balok AB, jika berat balok sendiri diabaikan.

$$R_A = \frac{M_B - M_A}{4} = 0{,}75 \text{ ton } (\downarrow)$$

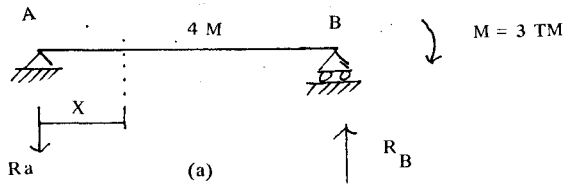
$R_B = R_A = 0{,}75$ ton (↑)

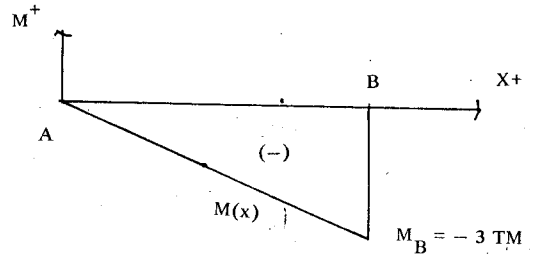
Titik A kita tentukan sebagai titik pangkal koordinat Cartesian, maka :

$M(x) = -M_A - R_A x = -3 - 0{,}75x$

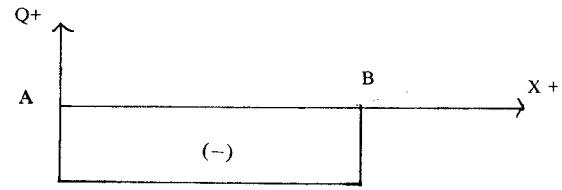
$Q(x) = M(x) - 0{,}75$

Diagram momen lentur dan gaya lintang dapat digambarkan seperti terlihat pada gambar 2.5.G.1.b dan 2.5G.1.c.





(b) Diagram momen lentur



(c) Diagram gaya lintang

gambar 2.5.G.1

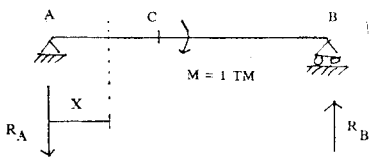
Contoh 2.5.H : Momen Luar Bekerja dalam Bentang Balok.

Balok AB di atas tumpuan sendi dan rol (gambar 2.5.H.1.a), panjang balok = 5 m. Momen luar M = 1 tm ↻, bekerja di C pada jarak 2 m dari A atau 3 m dari B. Tentukan diagram gaya lintang dan momen lentur balok, jika berat balok sendiri diabaikan.

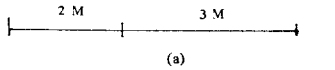
Solusi :

Dari kesetimbangan sistem kita peroleh : R_A = 0,2 ton (↓) dan R_B = 0,2 ton (↑).

Titik A kita tentukan sebagai titik pangkal koordinat Cartesian, maka :

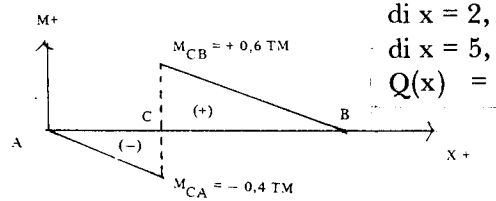


Bagian AC, $0 \leqslant x \leqslant 2$: (*)
$M(x) = -R_A x = -0{,}2x$
di $x = 0$, $M(0) = M_A = 0$
di $x = 2$, $M(2) = M_{CA} = -0{,}4$ tm
$Q(x) = M'(x) = -0{,}2$ ton.

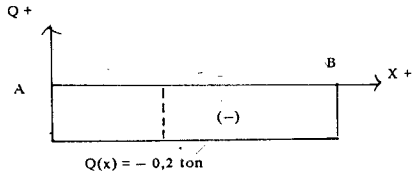


(a)

Bagian CB, $2 < x \leqslant 5$; (*)
$M(x) = R_B(5 - x) = 0{,}2(5-x)$.
di $x = 2$, $M(2) = M_{CB} = +0{,}6$ tm.
di $x = 5$, $M(5) = M_B = 0$.
$Q(x) = M'(x) = -0{,}2$ ton.



(b) Diagram momen lentur



(c) Diagram gaya lintang

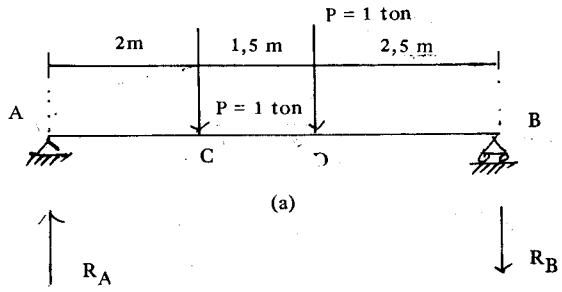
gambar 2.5.H.1

Diagram momen lentur dan diagram gaya lintang dapat diperoleh dari penggambaran grafik M(x) dan Q(x) – gambar 2.5.H.1.b dan 2.5.H.1.c.

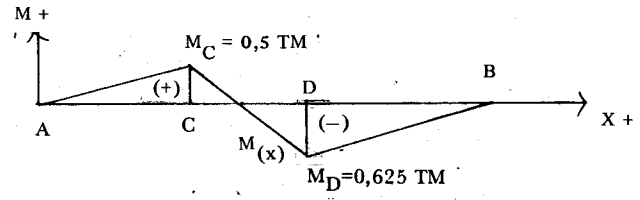
(*) lihat catatan pada contoh 2.5.E.

Contoh 2.5.I : Beban Balok berupa Kopel Gaya.

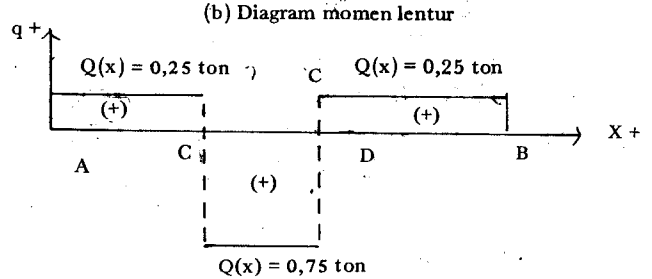
Balok A di atas tumpuan sendi dan rol (gambar 2.5.I.1.a). Panjang balok = 6 m. P = 1 ton bekerja vertikal ke bawah di C, AC = 2 m. Sedangkan di D, BD = 2,5 m. bekerja juga gaya P = 1 ton tapi bekerja vertikal ke atas. Tetukan diagram momen lentur dan gaya lintang balok AB, jika berat balok sendiri diabaikan.



(a)



(b) Diagram momen lentur



(c) Diagram gaya lintang

gambar 2.5.I.1

Solusi :

Dari kesetimbangan sistem kita peroleh :

$R_A = \frac{P(1,5)}{6} = 0{,}25$ ton (↑) dan $R_B = 0{,}25$ ton (↓)

Dengan titik A sebagai titik pangkal koordinat Cartesian maka :

Bagian AC, $0 \leqslant x \leqslant 2$:

$M(x) = R_A x = 0{,}25x$

Di $x = 0$, $M(0) = M_A = 0$

Di $x = 2$, $M(2) = M_C = 0{,}5$ tm.

$Q(x) = M'(x) = 0{,}25$ ton

Bagian CD, $2 < x \leqslant 3{,}5$:

$M(x) = R_A x - P(x - 2) = -0{,}75x + 2$

Di $x = 2$, $M(2) = M_C = 0{,}5$ tm

Di $x = 3{,}5$, $M(3{,}5) = M_D = -0{,}75(3{,}5) + 2 = -0{,}625$ tm.

$Q(x) = M'(x) = -0{,}75$ ton.

Bagian DB, $3{,}5 < x \leqslant 6$:

$M(x) = -R_B(6 - x) = -0{,}25(6 - x) =$

$= -1{,}5 + 0{,}25x.$

Di $x = 3{,}5$, $M(3{,}5) = M_D = -1{,}5 + 0{,}25(3{,}5) =$

$= -0{,}625$ tm.

Di $x = 6$, $M(6) = M_B = -1{,}5 + 0{,}25(6) = 0$

$Q(x) = M'(x) = +0{,}25$ ton.

Diagram momen lentur (gambar 2.5.I.1.b) dan diagram gaya lintang (gambar 2.5.I.1.c) dapat diperoleh dengan menggambarkan grafik M(x) dan Q(x) tersebut di atas.

Catatan : Lihat, M maks dan M min *tidak* dapat ditentukan dengan $M'(x) = 0$, karena di $x = 2$ dan $x = 3{,}5$ turunan M(x) *tidak ada.*

Tetapi untuk $0 < x < 2$, $M'(x) > 0$, artinya di situ M menaik, dan untuk $2 < x < 3{,}5$, $M'(x) < 0$ artinya di situ M menurun, dan untuk $3{,}5 < x < 6$, $M'(x) > 0$, artinya di situ M menaik lagi sehingga jelas juga bahwa M mencapai maksimum di $x = 2$ dan minimum di $x = 3{,}5$.

Contoh 2.5.J : Balok Menganjur.

Balok ABC bertumpu pada sendi A dan rol B (gambar 2.5.J.1.a). AB = 4,5 m dan BC = 1,5 m. Tentukan diagram momen lentur dan gaya lintang balok ABC tersebut, jika berat balok, g = 0,3 t/m'.

Solusi :

Berat balok ABC, $G = g(4{,}5 + 1{,}5) = 1{,}8$ ton, titik berat balok terletak pada jarak 3 m dari A atau 1,5 m dari B.

Reaksi-reaksi tumpuan balok menjadi :

$R_A = 0{,}6$ ton dan $R_B = 1{,}2$ ton.

Titik A kita tentukan sebagai titik pangkal koordinat Cartesian, maka :

Bagian AB, $0 \leqslant x \leqslant 4{,}5$:

$M(x) = R_A x - \frac{1}{2}gx^2$

$M(x) = 0{,}6x - 0{,}15x^2$

di $x = 0$, $M(0) = M_A = 0$

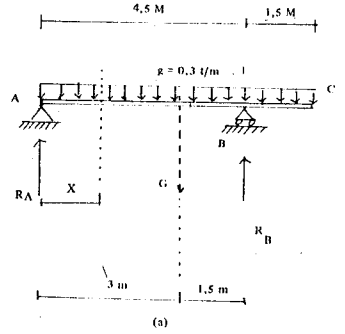
di $x = 4{,}5$, $M(4{,}5) = M_B = -0{,}34$ tm

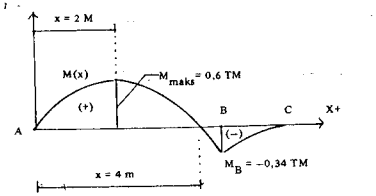
$M(x) = 0$ di $x = 4$

$M'(x) = 0{,}6 - 0{,}3x$

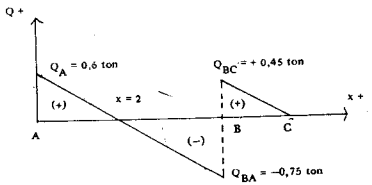
$M'(x) = 0$ di $x = 2$, $M(2) = 0{,}6$ tm dan merupakan M maksimum.

$Q(x) = M(x) = 0$,





(b) Diagram momen lentur



(c) diagram gaya lintang

gambar 2.5.J.1

Bagian BC, $4,5 < x \leq 6$:

$M(x) = -\frac{1}{2}g(6 - x)^2 = -0,15(6 - x)^2$

di $x = 4,5$, $M(4,5) = M_B = -0,34$ tm.

di $x = 6$, $M(6) = M_C = 0$

$Q(x) = M'(x) = -0,30x + 1,8$

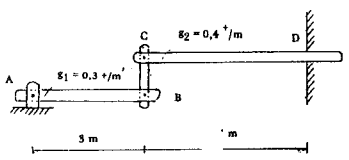
di $x = 4,5$, $Q(4,5) = Q_{BC} = 0,45$ ton.

di $x = 6$, $Q(6) = Q_C = 0$.

Diagram momen lentur dan gaya lintang terlihat pada gambar 2.5.J.1.b dan 2.5.J.1.c

Catatan : Periksalah bahwa $M'(x) = 0$ di $x = 2$ dan M maksimum di $x = 2$.
Tetapi di $x = 4,5$, $M'(x)$ *Tidak* ada, M tidak dapat diturunkan di $x = 4,5$ tapi M minimum di situ. Baca kembali Thm 2 dengan teliti.

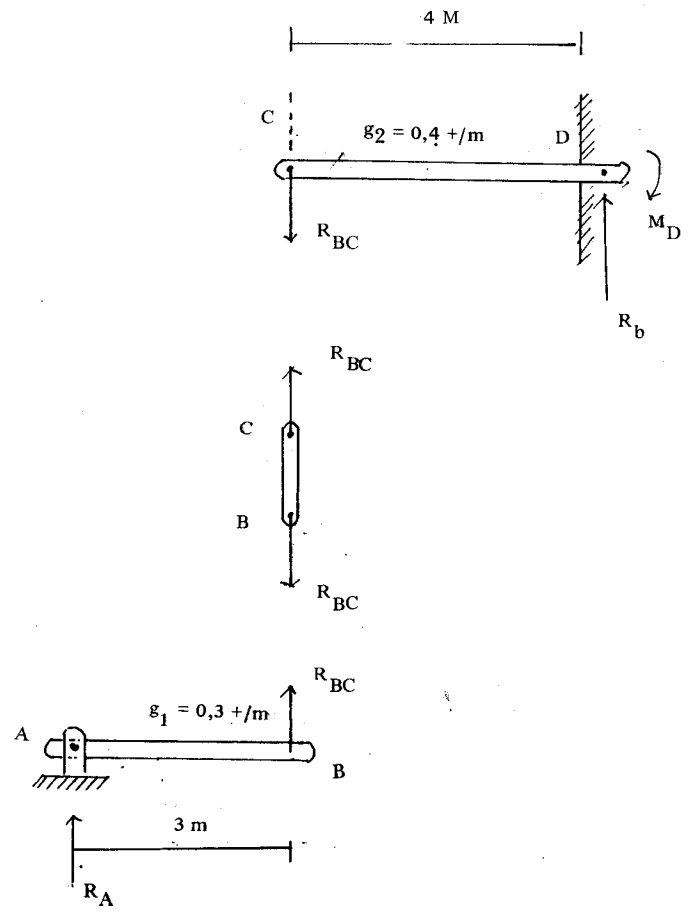
Contoh 2.5.K :



Struktur statis tertentu seperti dalam gambar 2.5.K.1, terdiri dari batang AB, BC dan CD. Hubungan antar batang di B dan C merupakan hubungan sendi. Di A pada batang AB terdapat tumpuan sendi; sedangkan batang CD terjepit sempurna di D. Berat batang AB $g_1 = 0,3$ t/m' dan batang Cd, $g_2 = 0,4$ t/m'. Panjang AB = 3 m; CD = 4m.

Jika berat batang BC diabaikan dan beban lainpun tak ada (selain berat batang AB dan CD) tentukanlah diagram gaya-gaya-dalam yang terjadi di setiap penampang pada batang-batang struktur tersebut.

Solusi :



gambar 2.5.K.2

Perhatikan diagram raga-lepas dalam gambar 2.5.K.2. Agar raga-lepas BC setimbang, gaya sendi di B dan C harus bekerja vertikal, sama besar dan berlawanan arah (Dalam gambar, kedua gaya tersebut dinyatakan dengan R_{BC}).

Dari kesetimbangan raga-lepas AB kita peroleh :

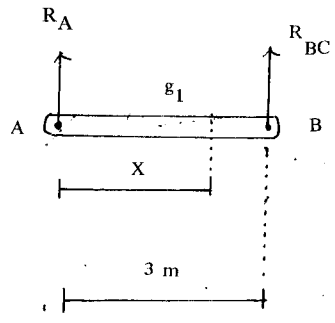
R_A = reaksi tumpuan di A = $\frac{1}{2}(0,3)(3) = 0,45$ ton (↑) dan
$R_{BC} = \frac{1}{2}(0,3)(3) = 0,45$ ton (↑)

Kesetimbangan raga-lepas CD menghasilkan :

R_D = gaya reaksi D = $0,4(4) + R_{BC} = 2,05$ ton, dan
M_D = momen reaksi D = $R_{BC}(4) + \frac{1}{2}(0,4)(4)^2 = 5$ tm

Fungsi gaya-gaya-dalam pada masing-masing batang dapat ditentukan sebagai berikut :

Batang AB;Titik A sebagai titik pangkal koordinat Cartesian $0 \leqslant x \leqslant 3$ (gambar 2.5.K.3).



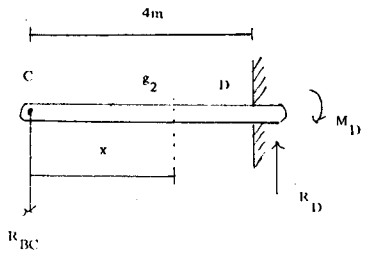
gambar 2.5.K.3

$M(x) = R_A x - \frac{1}{2}g_1 x^2 = 0,45x - 0,15x^2$;
di $x = 0$, $M(0) = M_A = 0$,
$M'(x) = 0,45 - 0,3x$;
di $x = 1,5$, $M'(1,5) = 0$
M maksimum = $M(1,5) = 0,3375$ tm.
$Q(x) = M'(x) = 0,45 - 0,3x$;
di $x = 0$, $Q(0) = Q_A = 0,45$ ton
di $x = 3$, $Q(3) = Q_B = -0,45$ ton.

Batang BC : Lihat kembali diagram raga-lepas dalam gambar 2.5.K.2, raga-lepas BC mengalami gaya tarik sebesar R_{BC}, atau :

$N_{BC} = 0,45$ ton

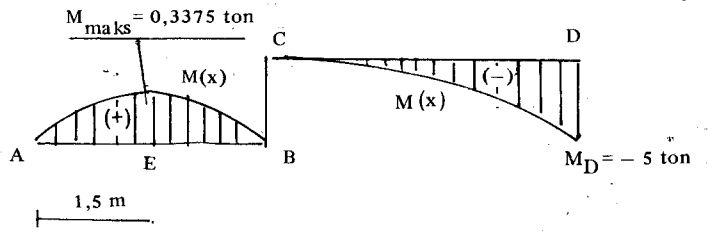
Batang CD : Titik C sebagai titik pangkal koordinat Cartesian, $0 \leqslant x \leqslant 4$ (gambar 2.5.K.4).



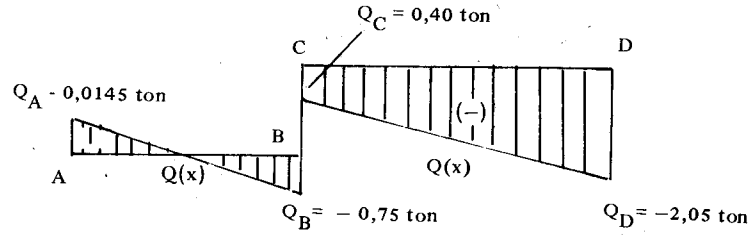
gambar 2.5.K.4

$M(x) = -R_{BC}x - \frac{1}{2}g_2 x^2 = -0,45x - 0,2x^2$;
di $x = 4$, $M(4) = M_D = -5$tm.
$Q(x) = M'(x) = -0,45 - 0,4x$;
di $x = 0$, $Q(0) = Q_C = -0,45$ ton,
di $x = 4$, $Q(4) = Q_D = -2,05$ ton.

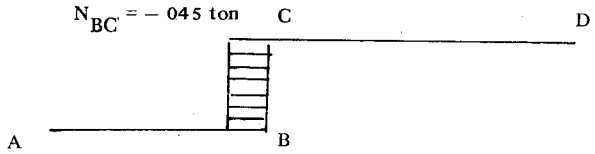
Dengan diperolehnya fungsi gaya-gaya dalam pada masing-masing batang seperti di atas, maka diagram gaya-gaya-dalam struktur dapat digambarkan seperti terlihat dalam gambar 2.5.K.5.



(a) Diagram momen lentur



(b) Diagram gaya lintang

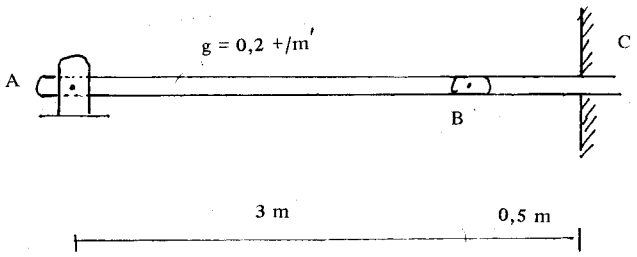


(c) Diagram gaya aksial

gambar 2.5.K.5

Contoh 2.5.L : Balok Bersendi Dalam* (Balok Gerber).

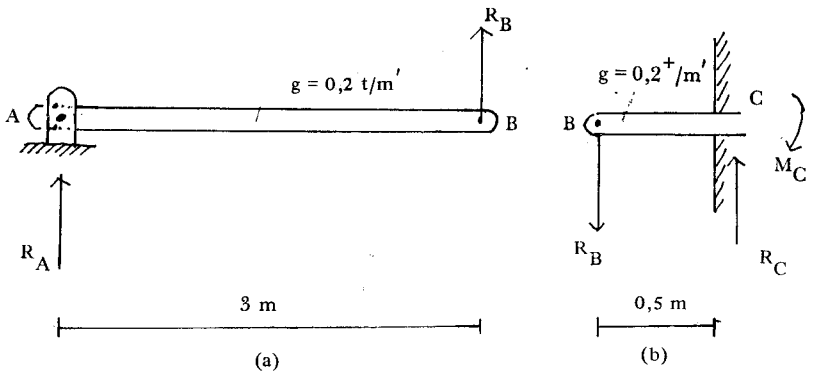
Struktur statis tertentu seperti dalam gambar 2.5.L.1, terdiri dari balok AB dan BC yang panjangnya masing-masing adalah 3 m dan 0,5 m. Hubungan antar balok di B merupakan hubungan sendi. Pada balok AB terdapat tumpuan sendi di A; Sedangkan ujung C balok BC terjepit sempurna. Berat balok AB dan BC adalah g = 0,2 t/m'. Tentukanlah reaksi tumpuan di A dan D; serta gambarkanlah diagram momen lentur dan gaya lintang balok ABC tersebut, akibat bekerjanya gaya berat balok yang bersangkutan sebagai beban struktur.



gambar 2.5.L.1

* Lihat contoh 2.2.A. Arti sendi dalam.

Solusi :



gambar 2.5.L.2. Diagram raga-lepas

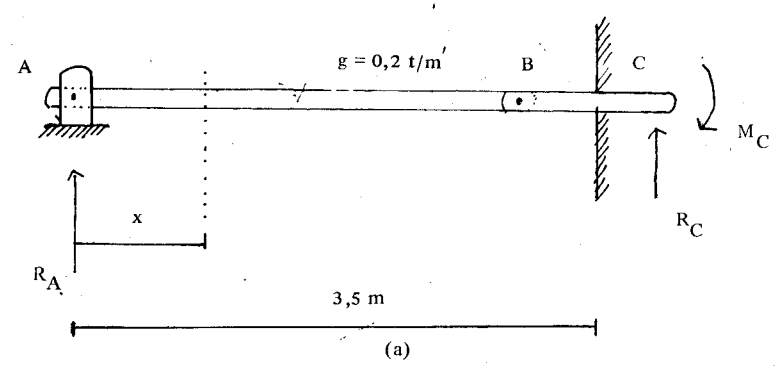
Dari kesetimbangan raga-lepas AB (gambar 2.5.L.2.a) kita peroleh :

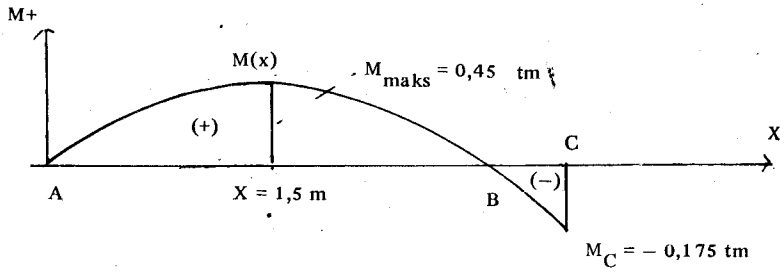
$R_A = \frac{1}{2}(0,2)(3) = 0,3$ ton ↑ dan $R_B = \frac{1}{2}(0,2)(3) = 0,3$ ton. (Arah R_B sesuai dengan gambar 2.5.L.2).

Dari kesetimbangan raga-lepas BC (gambar 2.5.L.2.b) kita peroleh :

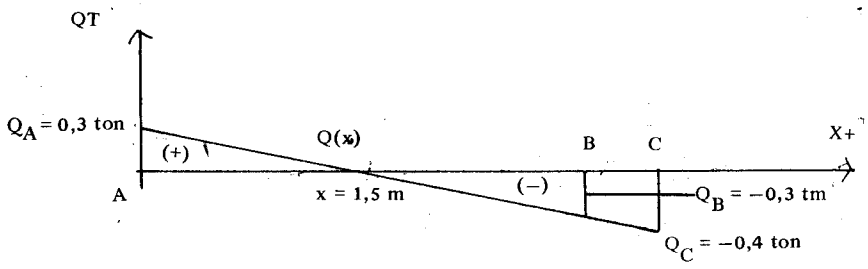
$R_C = R_B + 0,2(0,5) = 0,4$ ton ↑ dan

$M_C = R_B(0,5) + \frac{1}{2}(0,2)(0,5)^2 = 0,175$ tm ↻





(b) Diagram momen lentur



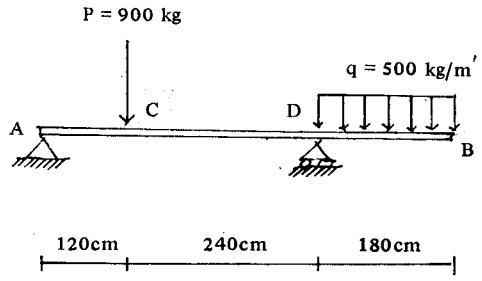
(c) Diagram gaya lintang

Diagram momen lentur balok ABC dapat digambarkan sebagai grafik fungsi : $M(x) = R_A x - \frac{1}{2}gx^2 = 0{,}3x - 0{,}1x^2$ (gambar 2.5.L.3.b).

Diagram gaya lintang balok ABC dapat digambarkan sebagai grafik fungsi : $Q(x) = R_A - gx = 0{,}3 - 0{,}2x$ (gambar 2.5.L.3.c).

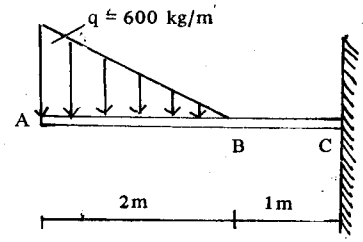
2.5.S.L. SOAL LATIHAN

1. Balok AB, panjangnya 540 cm, bertumpu pada sendi A dan rol D (gambar A). Beban vertikal P = 900 kg bekerja di C yang berjarak 120 cm dari A, dan beban terbagi rata q = 500 kg/m' bekerja di sepanjang bagian DB. Panjang bagian DB adalah 180 cm. Tentukanlah diagram momen lentur dan gaya lintang balok. (Abaikanlah berat balok).



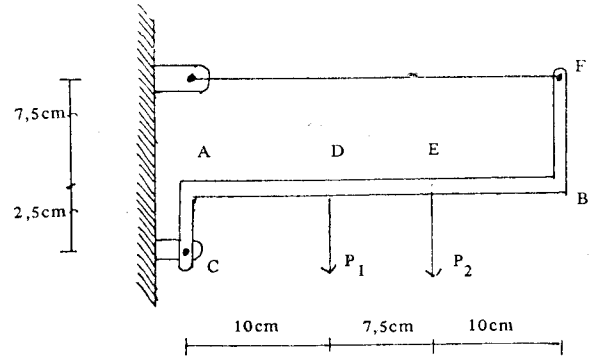
Gambar A

2. Balok ABC, panjangnya 3 m, terjepit secara sempurna di C (gambar B). Bagian AB, panjangnya 2 m, memikul "beban-segitiga" dengan q = 600 kg/m'. Tentukanlah diagram momen lentur dan gaya lintang balok tersebut. (Abaikanlah berat balok).



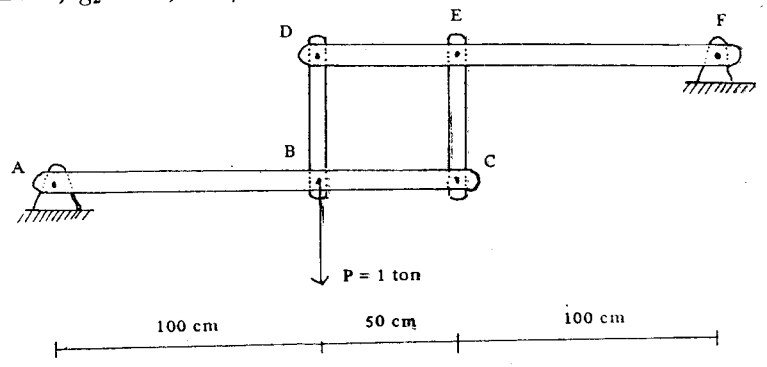
Gambar B

3. Batang CABF, monolit, memikul beban vertikal P_1 = 15 kg di D dan P_2 = 30 kg di E (gambar C). Di C, batang ditumpu oleh sebuah sendi; Dan di F, batang ditahan oleh sebuah kabel horizontal. Tentukanlah diagram momen lentur, gaya lintang dan gaya aksial batang. (Abaikanlah berat batang).



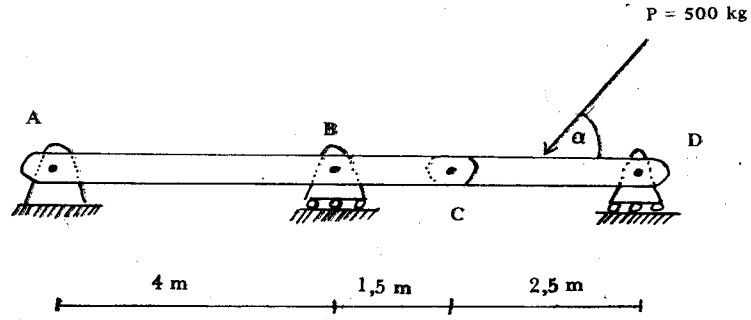
Gambar C

4. Bangunan statis tertentu seperti dalam gambar D, terdiri dari batang ABC, DEF, BD dan CE. Hubungan antar batang di B, C, D dan E merupakan hubungan sendi. Tumpuan A dan F masing-masing merupakan tumpuan sendi. Berat batang ABC, g_1 = 0,4 t/m' dan berat batang DEF, g_2 = 0,35 t/m'. Tentukanlah diagram momen lentur, gaya lintang dan gaya aksial pada masing-masing batang jika beban vertikal P = 1 ton bekerja di B. (Abaikanlah berat batang BD dan CE).



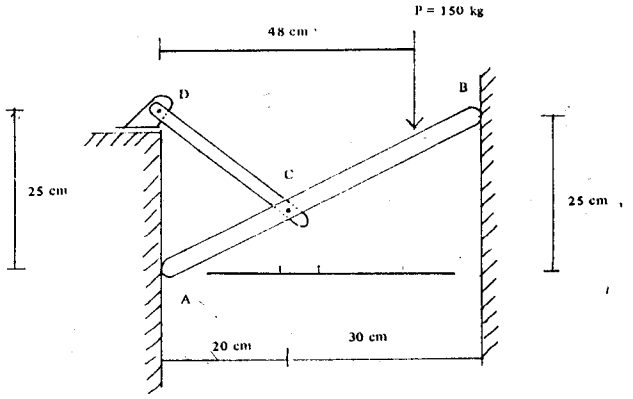
Gambar D

5. Bangunan statis tertentu seperti dalam gambar E, terdiri dari balok ABC dan CD. Hubungan antar balok di C merupakan hubungan sendi. Tumpuan A adalah sendi; Sedangkan tumpuan B dan D masing-masing merupakan tumpuan rol. Berat balok ABC dan CD adalah g = 0,2 t/m'. Tentukanlah diagram momen lentur, gaya lintang dan gaya aksial balok jika beban terpusat P = 500 kg bekerja di tengah-tengah bentang CD dan membentuk sudut α = arc tg 4/3 dengan sumbu balok.



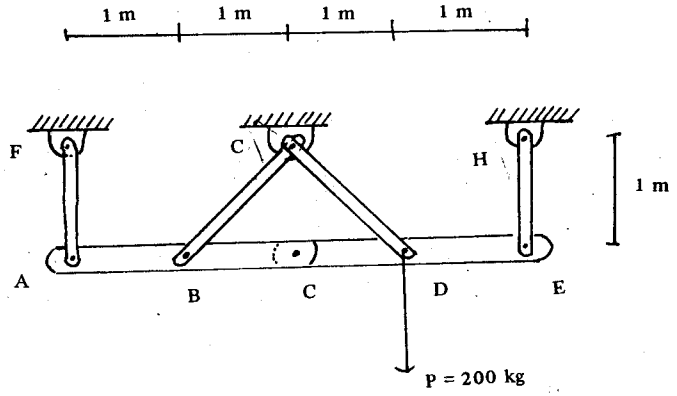
Gambar E

6. **Beban vertikal** P = 150 kg bekerja pada batang AB (gambar F). Batang AB ditempatkan di antara dua dinding licin dan dihubungkan oleh sendi-dalam C dengan batang DC. Batang DC bertumpu pada sebuah sendi-tumpuan di D. Abaikanlah berat batang dan tentukan :
   a. Reaksi tumpuan sendi D;
   b. Gaya normal dinding di A dan B;
   c. Gaya aksial batang DC;
   d. Diagram momen lentur, gaya lintang dan gaya aksial batang AB.



Gambar F

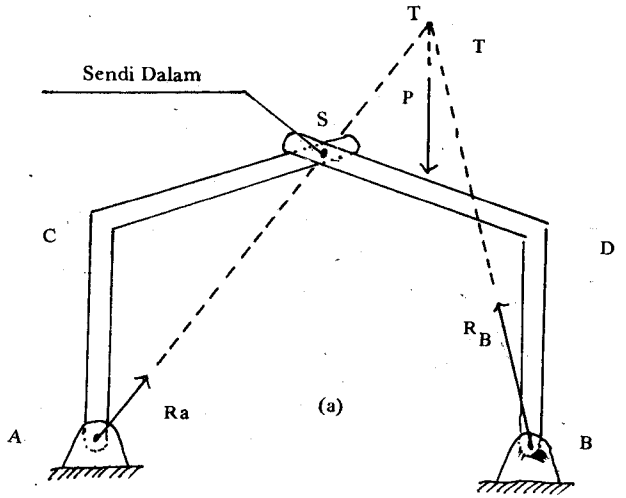
7. Batang ABC dan CDE dihubungkan dengan sendi-dalam C dan ditumpu oleh batang AF, BG, DG dan EH (gambar G). Hubungan antar batang di A, B, D dan E merupakan hubungan sendi. Tumpuan F, G dan H masing-masing adalah tumpuan sendi. Beban vertikal P = 200 kg bekerja di D. Abaikanlah berat batang dan tentukan :
   a. Gaya aksial pada batang AF, BG, DG dan EH;
   b. Diagram momen lentur, gaya lintang dan gaya aksial batang ABC dan CDE.

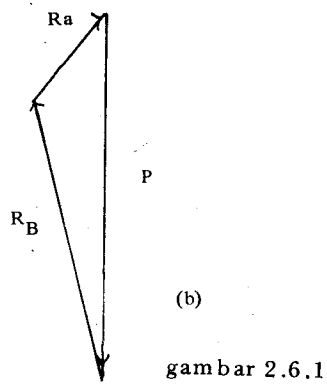


Gambar G

2.6. Bangunan Tiga Sendi.

Perhatikanlah bangunan dalam gambar 2.6.1.a. Bangunan ini memiliki dua tumpuan sendi di (A dan B) serta terdiri dari dua bagian struktur : bagian ACS dan bagian BDS, yang di hubungkan oleh sebuah sendi-dalam di S. Bangunan seperti ini dinamakan *bangunan tiga sendi.*



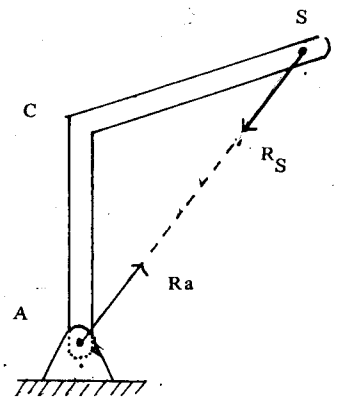


gambar 2.6.1

Dari segi statika, bangunan ini tergolong dalam sistem statis tertentu; artinya, reaksi-reaksi tumpuannya dapat ditentukan dengannya menggunakan syarat-syarat kesetimbangan statika biasa.

Tapi yang perlu diperhatikan dalam hal ini ialah, kendatipun beban luar bekerja vertikal seperti dalam gambar 2.6.1.a, reaksi-reaksi tumpuannya bekerja tidak vertikal. Mengapa ?

Dapat anda lihat pada contoh dalam gambar 2.6.1.a tersebut, bahwa garis kerja R_A harus berimpit dengan garis AS jika gaya P *dianggap* sebagai satu-satunya beban luar yang bekerja pada struktur (berat batang diabaikan). Karena, pada tinjauan kesetimbangan raga-lepas ACS (gambar 2.6.2), gaya R_A dan R_S (= gaya sendi di S) harus saling-mengimbangi dan ini baru bisa terjadi kalau kedua gaya tersebut segaris-kerja, yakni pada garis AS, karena tak ada gaya lain yang bekerja pada raga-lepas tersebut (berat batang diabaikan dan *di sendi S tidak mungkin terjadi momen dalam).*

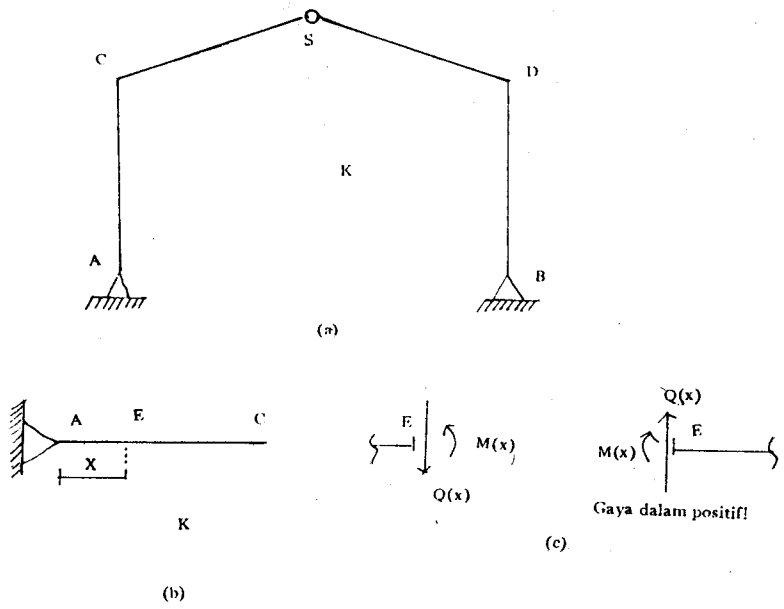


gambar 2.6.2

Penentuan reaksi-reaksi tumpuan dalam contoh-contoh yang akan diberikan nanti, akan dilakukan dengan cara analitik, karena cara grafik seperti dalam gambar 2.6.1.b di atas kurang menguntungkan untuk dipakai pada struktur yang memikul lebih dari satu beban terpusat dan/atau beban terbagi.

Penentuan gaya-gaya-dalam akan dilakukan dengan cara biasa seperti yang telah diuraikan di muka; tapi perjanjian tandanya, akan dilaksanakan dengan cara : melihat batang struktur yang bersangkutan dari sebelah "dalam" bangunan. Untuk mudahnya, kita tentukan saja suatu titik acuan K di "dalam" bangunan (gambar 2.6.3.a), yang akan selalu kita pandang sebagai suatu titik yang terletak di sebelah "bawah" batang yang kita tinjau. Sehingga titik A pada batang AC misalnya, dalam hal ini harus kita pandang sebagai ujung "kiri" batang AC; dan titik C sebagai ujung "kanan" batang AC tersebut (gambar 2.6.3.b).

Maka pada batang AC tersebut, tanda (+) harus diberikan kepada gaya lintang dan momen lentur yang arah kerjanya sesuai dengan arah kerja Q(x) dan M(x) dalam gambar 2.6.3.c sesuai dengan perjanjian tanda yang telah kita buat dalam pasal 3 di muka.

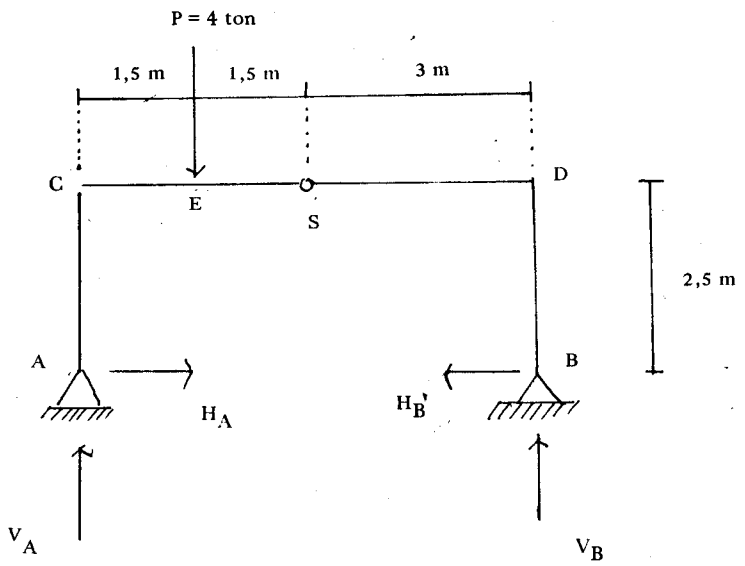


gambar 2.6.3

Contoh 2.6.A :

Portal tiga sendi ASB seperti terlihat dalam gambar 2.6.A.1, memikul beban terpusat P = 4 ton di E. Panjang CE = ES = 1,5 m; SD = 3 m. Tinggi AC = BD = 2,5 m. Tentukanlah diagram gaya lintang, momen lentur dan gaya aksial portal tersebut, jika berat batang-batang struktur sendiri diabaikan.

Solusi :

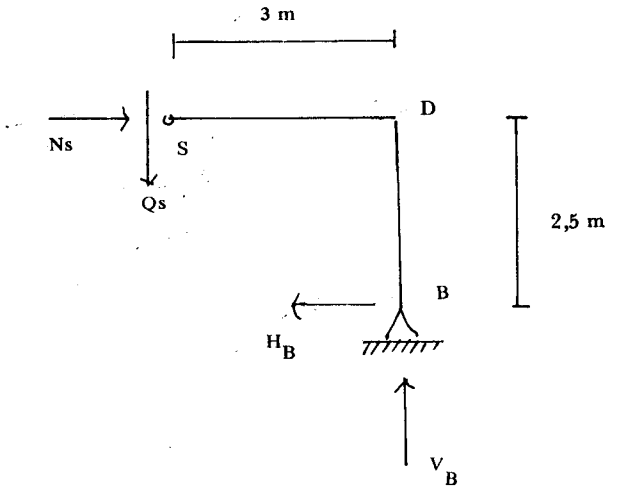


gambar 2.6.A.1

Sebagaimana telah dijelaskan di muka, bahwa reaksi tumpuan A dan B bekerja tidak vertikal, walaupun P bekeja vertikal. Untuk pemudahan, baiklah reaksi-reaksi tumpuan tersebut kita nyatakan saja dalam uraian vertikal (V_A dan V_B) dan uraian horizontal (H_A dan H_B).

Kesetimbangan seluruh sistem akan menghasilkan :
$\Sigma M_B = 0; V_A\,(6) - P(4,5) = 0$, atau : $V_A = 3$ ton (↑).
$\Sigma V = 0; V_B = P - V_A = 1$ ton (↑).

Besar H_B dapat ditentukan dengan meninjau kesetimbangan pada raga-lepas BDS (gambar 2.6.A.2), sambil mengingat bahwa di sendi S tidak terjadi momen dalam :

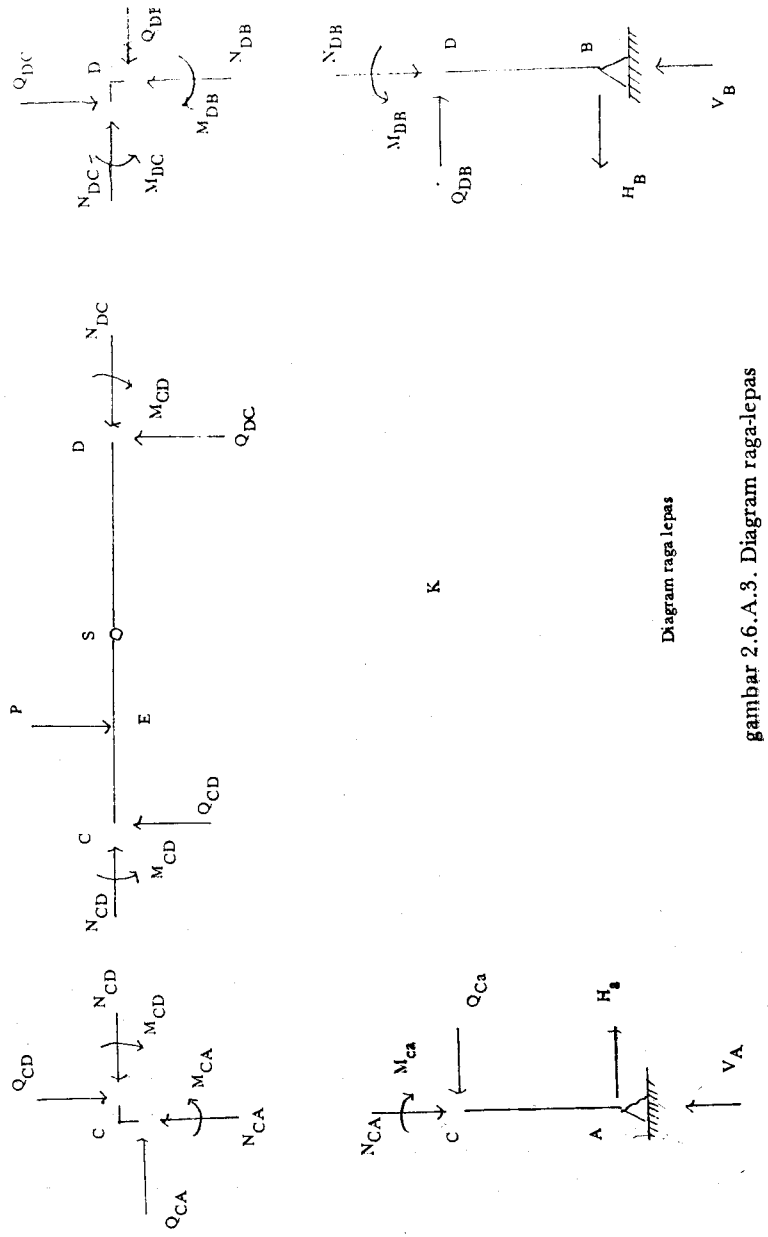


gambar 2.6.A.2

$\Sigma M_S = 0; V_B(3) - H_B(2,5) = 0$, atau : $H_B = 1,2$ ton (←).

Dan kembali kepada kesetimbangan seluruh sistem kita peroleh : $H_A = H_B = 1,2$ ton (→).

Penyelidikan gaya-gaya-dalam struktur, dapat dilakukan dengan bantuan diagram raga-lepas seperti terlihat dalam gambar 2.6.A.3. Titik acuan K kita pandang sebagai suatu titik yang terletak di sebelah "bawah" semua batang struktur dan perjanjian tanda dalam pasal 3 di muka tetap berlaku.



gambar 2.6.A.3. Diagram raga-lepas

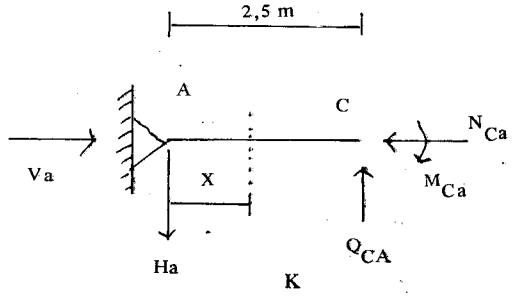
Bagian AC (gambar 2.6.A.4), $0 \leqslant x < 2{,}5$:

$M(x) = -H_A x = -1{,}2x$; di $x = 2{,}5$, $M(2{,}5) = M_{CA} = -3$tm.

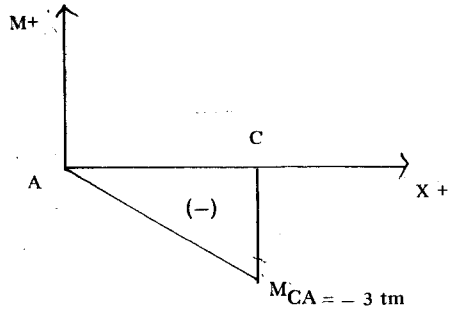
$Q(x) = M(x) = -1{,}2$ ton; $Q_A = Q_{CA} = -1{,}2$ ton.

$N(x) = -V_A = -3$ ton.

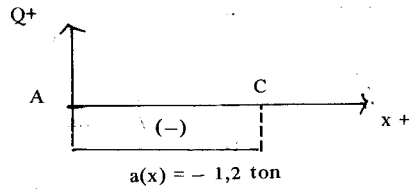
Diagram M(x), Q(x) dan N(x) masing-masing terlihat dalam gambar 2.6.A.4.b, 2.6.A.4.c dan 2.6.A.4.d.



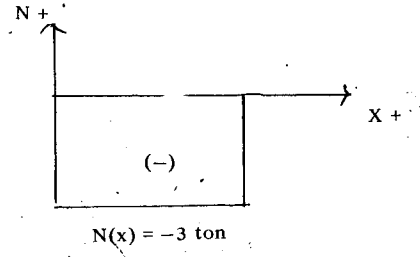
(a) Raga lepas AC



(b) Diagram momen lentur



(c) Diagram gaya lintang



(d) Diagram gaya aksial

gambar 2.6.A.4

Kesetimbangan titik C sebagai suatu raga-lepas (gambar 2.6.A.3) :

Perhatikan perjanjian tanda gaya-gaya-dalam ($|x|$ = harga mutlak x).

$|Q_{CD}| = |N_{CA}| = 3$ ton; $Q_{CD} = +3$ ton.

$|N_{CD}| = |Q_{CD}| = 1{,}2$ ton; $N_{CD} = -1{,}2$ ton

$|M_{CD}| = |M_{CA}| = 3$ tm; $M_{CD} = -3$ tm.

Bagian CD (gambar 2.6.A.5), $0 < x < 6$:

sub-bagian CE, $0 < x \leqslant 1{,}5$:

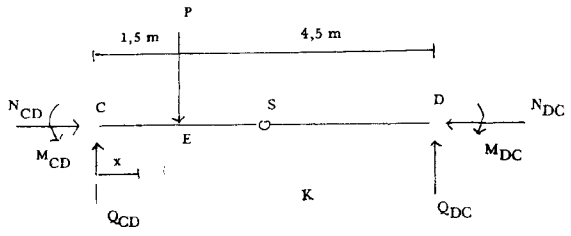
$M(x) = M_{CD} + Q_{CD}x = -3 + 3x;$

di $x = 0$, $M(0) = M_{CD} = -3$tm.

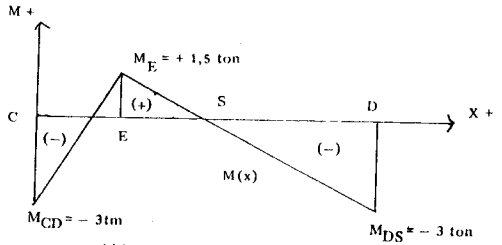
di $x = 1{,}5$, $M(1{,}5) = M_E = +1{,}5$ tm.

$Q(x) = M(x) = +3$ton.

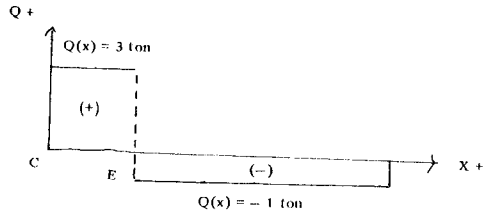
$N(x) = N_{CD} = -1{,}2$ ton.



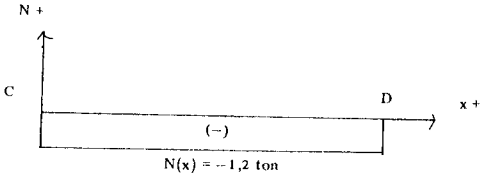
(a) Raga lepas CD



b) Diagram momen lentur



(c) Diagram gaya lintang



(d) Diagram gaya aksial

gambar 2.6.A.5

gambar 2.6.A.5

sub-bagian ED, $1{,}5 < x < 6$:

$M(x) = M_{CD} + Q_{CD}\,x - P(x-1{,}5) = 3+3x-4(x-1{,}5)$

$= -x + 3;$

di $x = 6$, $M(6) = M_{DC} = -3$ tm

$Q(x) = M'(x) = -1$ ton; $Q_{DC} = -1$ ton.

$N(x) = N_{CD} = -1{,}2$ ton; $N_{DC} = -1{,}2$ ton.

Grafik M(x), Q(x) dan N(x) masing-masing terlihat dalam gambar 2.6.A.5.b, 2.6.A.5.c dan 2.6.A.5.d.

Kesetimbangan raga-lepas titik D (gambar 2.6.A.3) :

$|Q_{DB}| = |N_{DC}| =$ 1,2 ton ; $Q_{DB} = +1{,}2$ ton
$|N_{DB}| = |Q_{DC}| =$ 1 ton ; $N_{DB} = -1$ ton
$|M_{DB}| = |M_{DC}| =$ 3 tm ; $M_{DB} = -3$ tm.

Bagian DB (gambar 2.6.A.6), $0 < x \leqslant 2{,}5$:

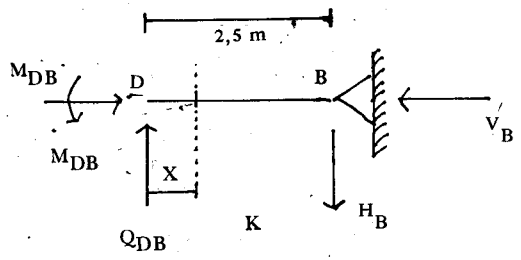
$M(x) = M_{DB} + Q_{DB}x = -3 + 1{,}2x;$

di $x = 0$, $M(0) = M_{DB} = -3$tm

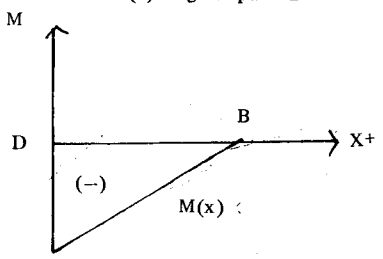
di $x = 2{,}5$, $M(2;5) = M_B = 0$

$Q(x) = M(x) = 1{,}2$ ton
$N(x) = N_{DB} = -1$ ton.

Grafik M(x), Q(x) dan N(x) masing-masing terlihat dalam gambar 2.6.A.6.b, 2.6.A.6.c. dan 2.6.A.6.d.

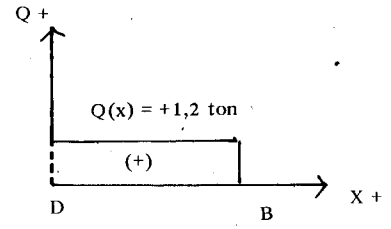


(a) Raga Lepas DB

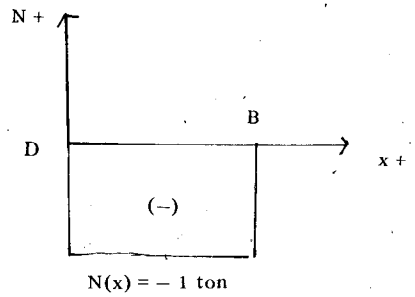


(b) Diagram momen lentur

gambar 2.6.A.6

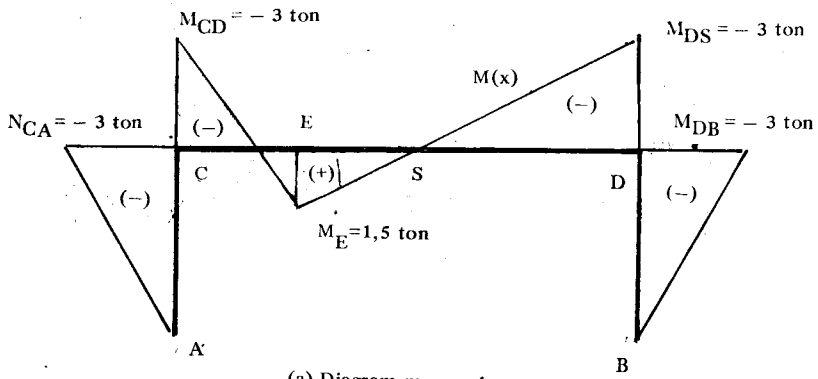


(c) Diagram Gaya Lintang

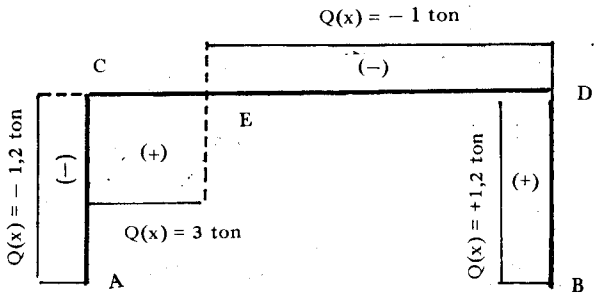


(d) Diagram gaya aksial

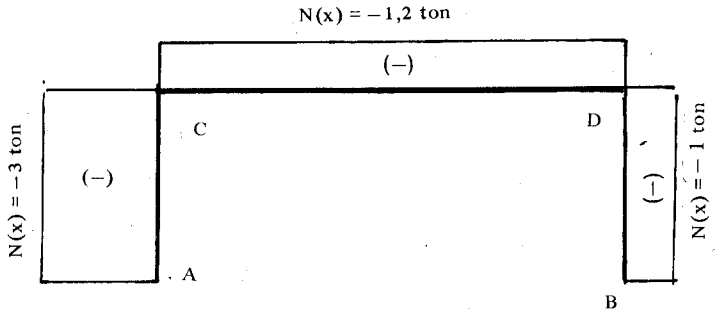
Diagram momen lentur, gaya lintang dan gaya aksial portal kini dapat anda lihat dalam gambar 2.6.A.7. Di sini, ordinat negatif digambarkan ke arah luar portal, agar diagram-diagram tersebut enak dilihatnya.



(a) Diagram momen lentur



(b) Diagram gaya lintang



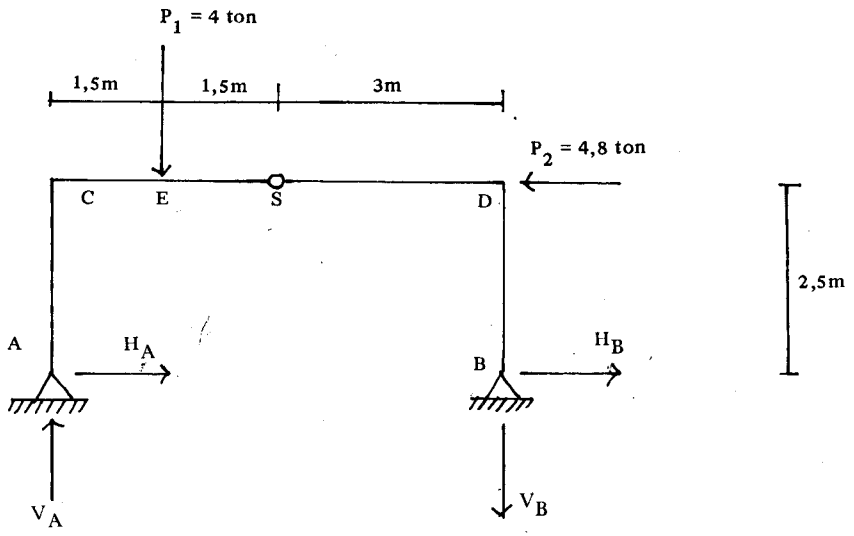
(c) Diagram gaya aksial

gambar 2.6.A.7

Contoh 2.6.B :

Portal tiga sendi seperti terlihat dalam gambar 2.6.B.1. P_1 = 4 ton bekerja vertikal di E, dan P_2 = 4,8 ton bekerja horizontal di D. Panjang CE = ES = 1,5 m; panjang SD = 3m Tinggi AC = BD = 2,5 m. Jika berat batang-batang portal tersebut diabaikan, tentukanlah diagram momen lentur, gaya lintang dan gaya aksial portal tiga sendi tersebut.

Solusi :



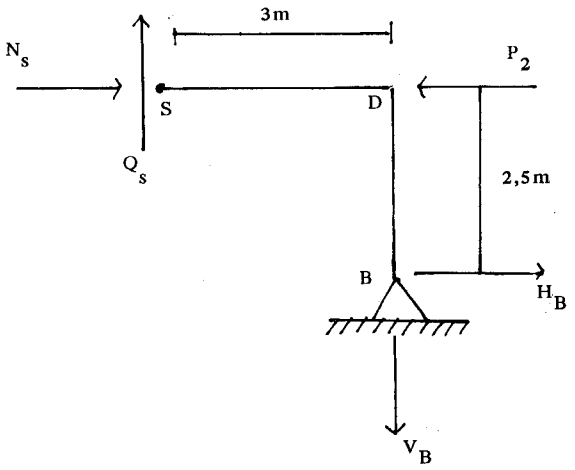
gambar 2.6.B.1

Reaksi-reaksi tumpuan A dan B kita nyatakan dalam uraian vertikal (V_A dan V_B) dan uraian horizontal (H_A dan H_B).

Dan dari kesetimbangan seluruh sistem kita peroleh :
V_A = 5 ton (↑) dan V_B = 1 ton (↓).

Dari kesetimbangan raga-lepas BDS (gambar 2.6.B.2) kita peroleh :

H_B = 1,2 ton (→).

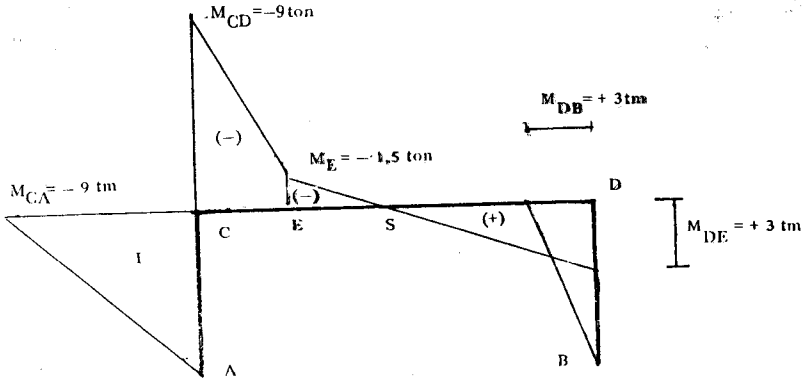


gambar 2.6.B.2

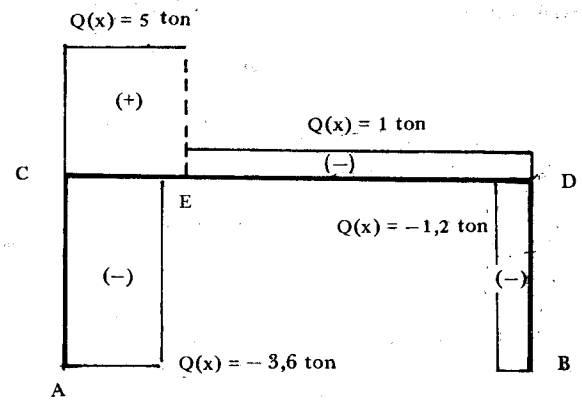
Dan kembali kepada kesetimbangan seluruh sistem kita dapatkan :

$H_A = 3{,}6$ ton (→).

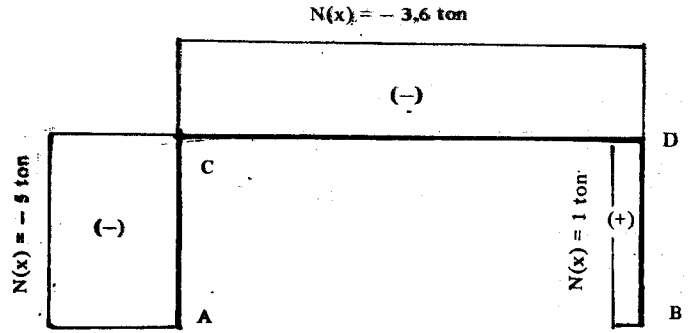
Dengan cara yang sama, seperti dalam contoh 2.6.A di muka, kita peroleh diagram gaya-gaya dalam portal seperti dalam gambar 2.6.B.3.



(a) Diagram momen lentur



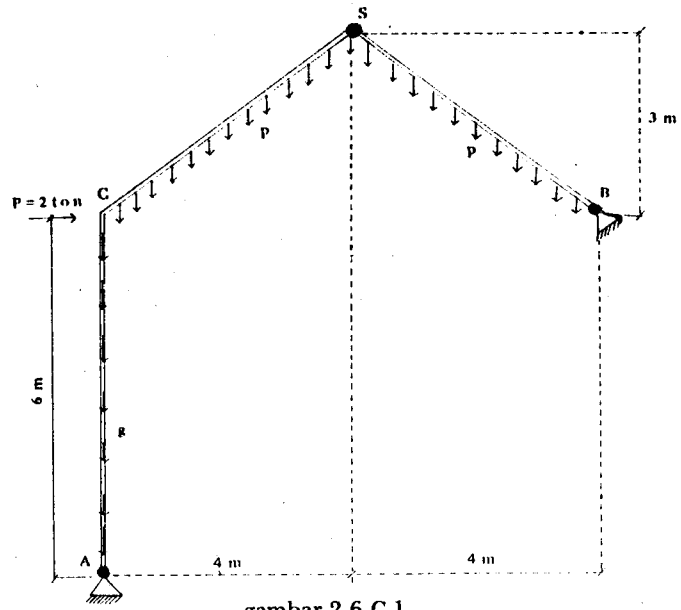
(b) Diagram gaya lintang



(c) Diagram gaya aksial

gambar 2.6.B.3

Contoh 2.6.C :

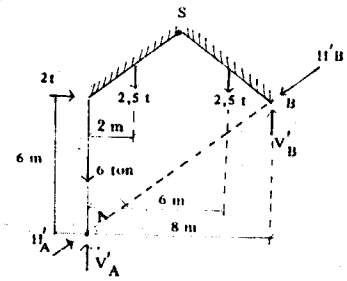


gambar 2.6.C.1

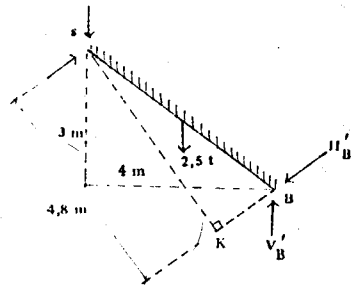
Bangunan tiga sendi ABS seperti gambar 2.6.C.1 memikul beban merata pada bagian CSB sebesar p = 0,5 ton/m, sedangkan berat tiang AC adalah g = 1 ton/m, gaya horisontal di C, searah dengan CB, adalah P = 2 ton. Tentukanlah diagram momen lentur, gaya lintang dan gaya aksial pada bangunan tersebut.

Solusi :

Karena AB tidak horizontal maka uraian gaya reaksi di A dan di B tidak kita uraikan atas gaya vertikal dan horizontal, melainkan dalam arah vertikal dan *arah sejajar AB,* agar ketika kita menghitung momen di A maupun di B, gaya dalam arah AB tersebut tidak merepotkan. Nah, ambillah momen di A untuk mendapatkan reaksi vertikal di B (gambar 2.6.C.2)



gambar 2.6.C.2



gambar 2.6.C.3

$(2,5)(2) + (2,5)(6) + (2)(6) - V'_B(8) = 0$

$V'_B = 4$ ton.

Ambil momen di B,

$V'_A(8) - (6)(8) - (2,5)(6) - (2,5)(2) = 0$

$V'_A = 8,5$ ton

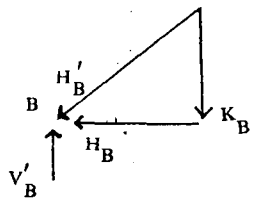
Jangan risau, $V'_A + V'_B$ memang tidak sama dengan jumlah beban vertikal, yakni 11 ton, sebab uraian reaksi sejajar AB masih "mengandung" gaya-gaya vertikal. Marilah kita tentukan dulu uraian dalam arah AB dengan meninjau raga-lepas SB, (gambar 2.6.C.3).

Ambil momen di S, dengan terlebih dulu menentukan jarak gaya H_B dengan S, yakni SK = 4,8 m, sehingga kita peroleh:

$(2,5)(2) - V'_B(4) + H'_B(4,8) = 0$

$H'_B = 2,292$ ton.

Sekarang uraikanlah H'_B dalam arah horisontal dan vertikal (gambar 2.6.C.4), sebutlah masing-masing sebagai H_B dan K_B.



gambar 2.6.C.4

Jelas dari gambar 2.6.C.4 bahwa $K_B = 0,6\ (H'_B) = 1,375$ t(↓) dan $H_B = 0,8\ (H'_B) = 1,833$. Dengan demikian reaksi di B bolehlah diuraikan dalam arah vertikal sebesar $V_B = V'_B - K_B$, atau $V_B = (4 - 1,375)$ ton = 2,625 ton (↑).
Dan $H_B = 1,833$ ton (←)

Dengan hasil di atas sebenarnya kita sudah dapat menyimpulkan bahwa reaksi di A yang kita uraikan dalam arah horisontal sekarang adalah $H_A = (-1,833 + P) = 0,167$ ton (←).

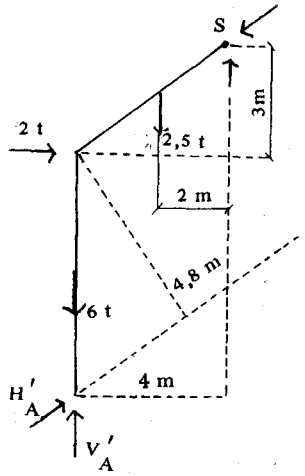
Dan uraian vertikalnya haruslah $V_A = 6 + 2,5 + 2,5 - V_B$, atau $V_A = (11 - 1,625)$ ton = 8,375 ton (↑), karena seluruh bangunan harus setimbang baik gaya-gaya horisontalnya yang searah P, maupun gaya-gaya vertikalnya.

Hasil yang sama juga akan kita peroleh dengan meninjau raga-lepas bagian AS (gambar 2.6.C.5) :

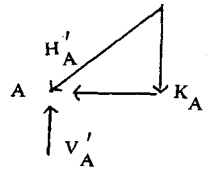
Ambil momen di S, tentu jarak S ke gaya H'_A, juga sama dengan SK = 4,8 m, sehingga kita peroleh :

$$V'_A(4) - (6)(4) - (2)(3) - (2,5)(2) - H'_A\ (4,8) = 0$$
$$H'_A = -\ 0,208\ (\uparrow)$$

Uraikan H'_A dalam arah horisontal $H_A = (0,8)\ H'_A = 0,167$ ton (←) dan dalam arah vertikal $K_A = (0,6)(H'_A) = 0,125$ ton (↓), (lihat gambar 2.6.C.6). Alhasil kita dapatkan $V_A = V'_A - K_A = 8,375$ t (↑)
Cocok bukan ?



gambar 2.6.C.5



gambar 2.6.C.6

Nah, setelah reaksi masing-masing tumpuan diketahui, penggambaran diagram momen lentur, gaya lintang dan gaya aksial dapat dilakukan seperti pada gambar (2.6.C.7.)

Dalam penentuan diagram momen lentur, bangunan tersebut tidak membawa masalah, artinya mudah dikerjakan secara langsung. Tetapi untuk diagram gaya lintang kita mesti menguraikan dulu semua gaya dalam arah aksial dan arah tegak lurus sumbu batang, karena begitulah perjanjiannya.

Kita awali dengan bagian AC yang mudah karena semua gaya sudah "sesuai" dengan arah batang ini, dan harap diperhatikan bahwa gaya aksial tekannya tidak sama pada setiap bagian batang, akibat beratnya sendiri. Bagian ini tidak dibahas, sudah jelas.

Sebagai contoh, akan kita ulas penentuan diagram gaya-dalam untuk bagian CS (gambar 2.6.C.8) :

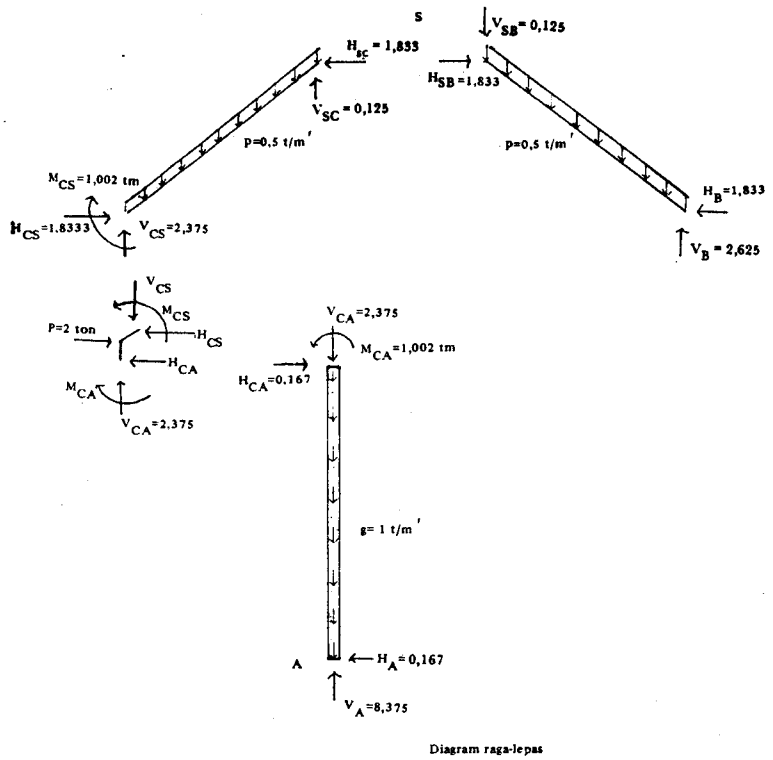
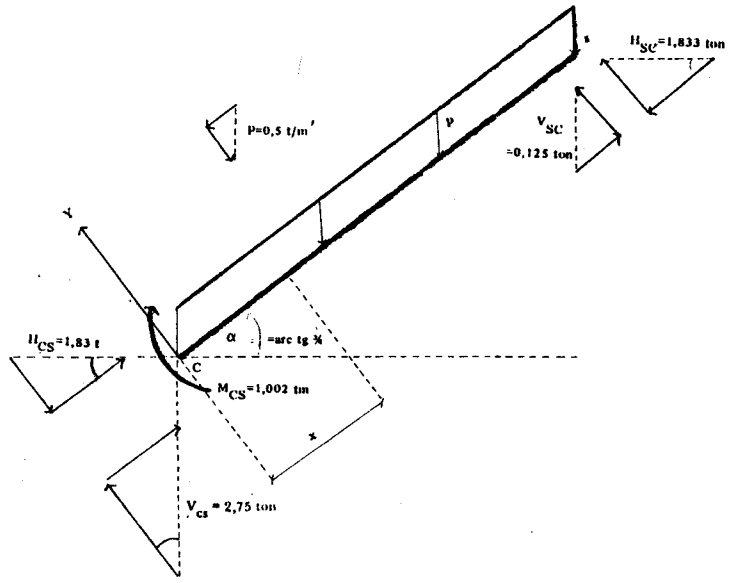


Diagram raga-lepas

gambar 2.6.C'7. Diagram raga-lepas



gambar 2.6.C.8

Di ujung C :

Gaya yang sejajar CS adalah, sebutlah X_C = (H_{CS} cos α + V_{CS}sin α) atau X_C = 2,891 ton (↗).

Gaya yang tegak-lurus CS adalah, sebutlah Y_C = (–H_{CS} sin α + V_{CS} cos α); atau Y_C = 0,8 ton (↖).

Momen lentur di C, jelas M_{CS} = 1,002 tm (positif menurut perjanjian kita).

Di sepanjang bagian CS, beban merata p kita uraikan dalam arah p_X = 0,3 t/m sejajar SC dan p_Y = 0,4 t/m tegak lurus SC.

Alhasil di titik sejauh x dari C (lihatlah kembali patokan "bawah-atas" yang telah ditentukan) :

$$M(x) = M_{CS} + 0{,}8x - 0{,}5\,(p_y)\,(x^2)$$
$$= 1{,}002 + 0{,}8x - 0{,}2x^2.$$

Di x = 5 m atau di titik S, $M_S = 1{,}002 + 4 - 5 = 0$, tentu saja.

$Q(x) = M'(x) = 0{,}8 - 0{,}4x$

(Kita gunakan hubungan matematikal M dengan Q. M(x) dapat diturunkan di setiap x).

Gaya aksial di x, $N(x) = -X_C + p_x\,(x) =$

$N(x) = -2{,}891 + 0{,}3x$, di x = 5m atau di S, $N_S = -1{,}391$ ton, dan tentu saja ia harus sama dengan $X_S = -H_{SC} \cos \alpha + V_{SC} \sin \alpha = (-1{,}446 + 0{,}075)$ ton $= -1{,}371$, perbedaan hasil hanya diakibatkan kesalahan pembulatan yakni 0,02 ton.

Untuk bagian SB, cara yang serupa boleh kita gunakan. Alhasil kita peroleh diagram gaya-gaya-dalam bangunan ABS sebagai berikut : (gambar 2.6.C.9)

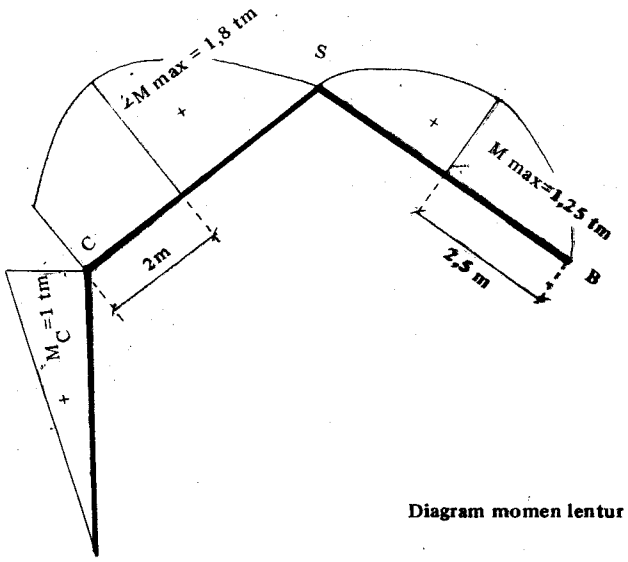


Diagram momen lentur

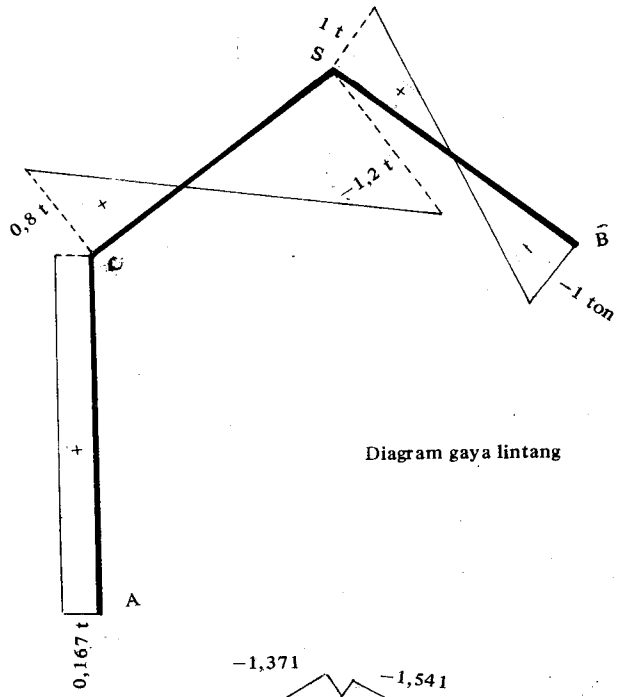


Diagram gaya lintang

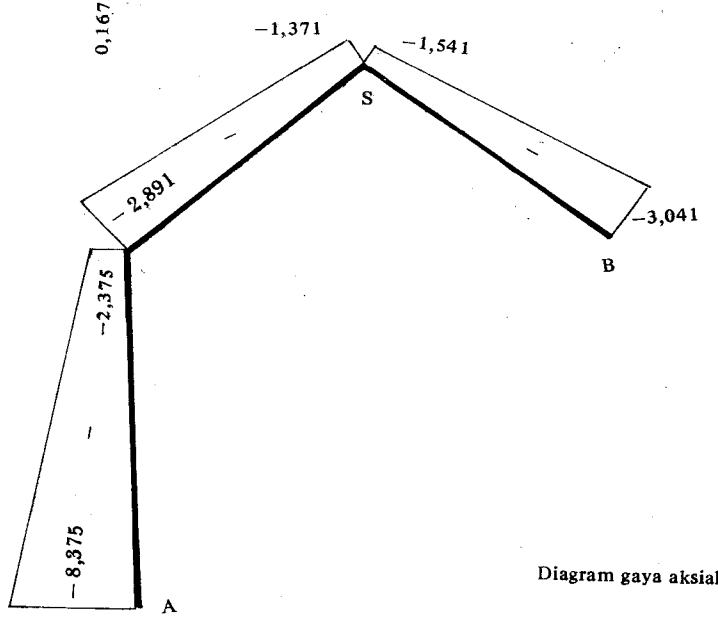
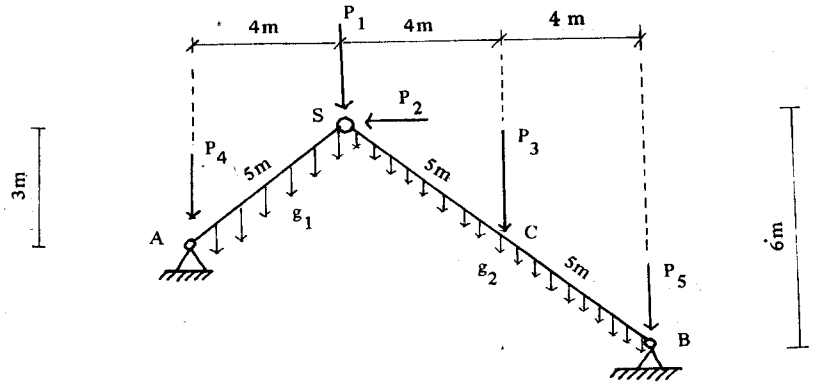


Diagram gaya aksial

gambar 2.6.C.9

Contoh 2.6.D :



gambar 2.6.D.1

Bangunan tiga sendi seperti dalam gambar 2.6.D.1, memikul beban :

P_1 = 4,5 ton, bekerja vertikal di S
P_2 = 2 ton, bekerja horisontal di S
P_3 = 4,50 ton, bekerja vertikal di C
P_4 = 2,25 ton, bekerja vertikal di A
P_5 = 2,25 ton, bekerja vertikal di B
g_1 = 1,8 t/m', terbagi rata di sepanjang batang AS
g_2 = 0,9 t/m', terbagi rata di sepanjang batang BS.

Tentukanlah diagram momen lentur, gaya lintang dan gaya aksial bangunan tiga sendi tersebut.

Solusi :

Untuk pemudahan, reaksi-reaksi tumpuan di A dan B, masing-masing kita nyatakan dulu dalam uraian vertikal (V'_A dan V'_B) dan uraian // tali busur AB (H'_A dan H'_B), lihat gambar 2.6.C.2.

Dengan mengambil jumlah momen terhadap titik B yang sama dengan nol, kita peroleh :

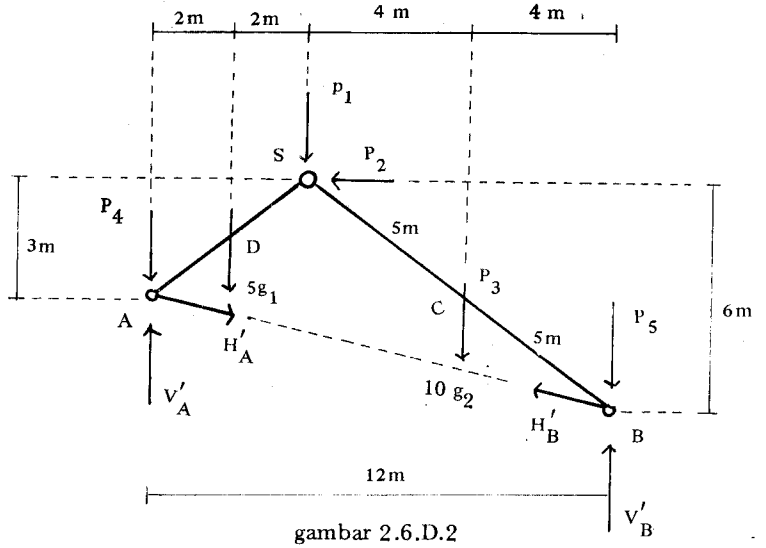
$V'_A(12) - P_4(12) - 5g_1(10) - P_1(8) - P_2(6) - P_3(4) - 10g_2(4) = 0$, atau :

$V'_A = 18{,}25$ ton (↑).

Dan dengan mengambil jumlah momen terhadap titik A yang sama dengan nol, kita peroleh :

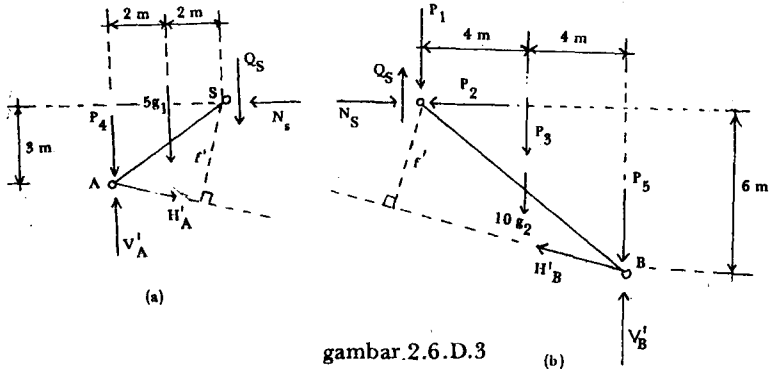
$V'_B(12) - P_5(12) - P_3(8) - 10g_2(8) + P_2(3) - P_1(4) - 5g_1(2) = 0$, atau :

$V'_B = 15{,}75$ ton (↑).



gambar 2.6.D.2

156 Kesetimbangan raga-lepas AS (gambar 2.6.D.3.a) akan menghasilkan :



gambar 2.6.D.3

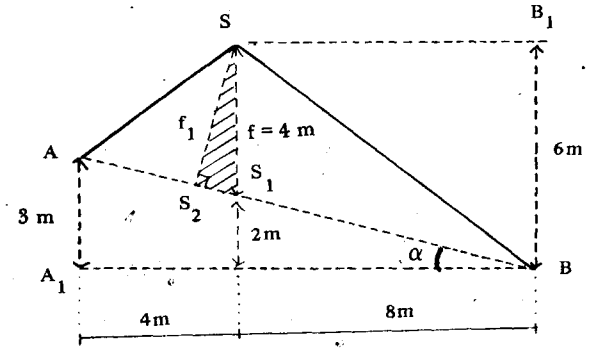
$\Sigma M_S = 0$, $V'_A(4) - P_4(4) - 5g_1(2) - H'_A f' = 0$, atau

$H'_A f' = 46$ tm (2.6.D.1)

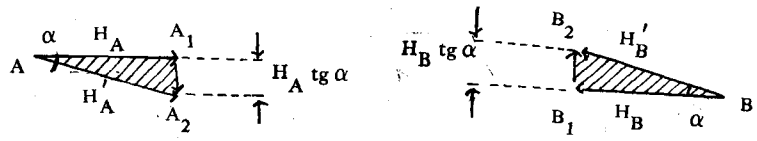
dengan :

f' = jarak sendi S ke tali busur AB.

Tapi, H'_A dapat kita nyatakan dalam uraian horizontal (= H_A) dan uraian vertikal (= H_A tg α) – gambar 2.6.C.4.b ; dan H'_A f' = H_Af karena ΔSS_1S_2 (gambar 2.6.D.4.a) sebangun dengan ΔAA_1A_2 (gambar 2.6.D.4.b), sehingga persamaan (2.6.D.1) di atas dapat kita gantikan dengan :



(a)



(b)

gambar 2.6.D.4

$H_A f = 46$ tm

dengan f = panjang garis vertikal SS_1 dalam gambar 2.6.D.4.a

= 4 m

sehingga :

H_A = 11,5 ton (→)

Uraian vertikal $H'_A = H_A$ tg α = 11,5(¼) = 2,875 ton (↓), dan reaksi tumpuan di A sekarang dapat dinyatakan dalam :

V_A = uraian vertikal reaksi tumpuan A

= $V'_A - H_A$ tg α = 15,375 ton (↑), dan

H_A = 11,5 ton (→).

Kesetimbangan raga-lepas BS (gambar 2.6.D.3.b) menghasilkan :

$\Sigma M_S = O\ V'_B(8) - P_5(8) - 10g_2(4) - P_3(4) - H'_B f' = 0$

$H'_B f' = 38$ tm (2.6.D.2)

Dan H'_B dapat dinyatakan dalam uraian horisontal (=H_B) dan uraian vertikal (= H_B tg α) – gambar 2.6.D.4.c; dan $H'_B f' = H_B f$ karena ΔSS_1S_2 (gambar 2.6.D.4.a) sebangun dengan ΔBB_1B_2 (gambar 2.6.D.4.c), sehingga persamaan (2.6.D.2) di atas dapat digantikan dengan :

$H_B f$ = 38 tm

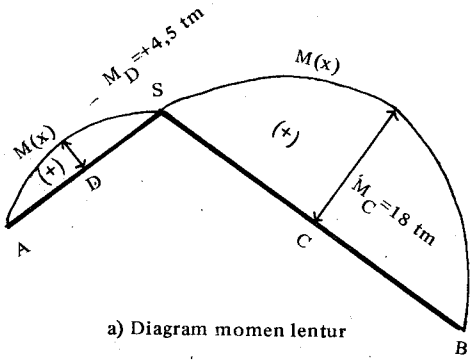
sehingga

H_B = 9,5 ton (←).

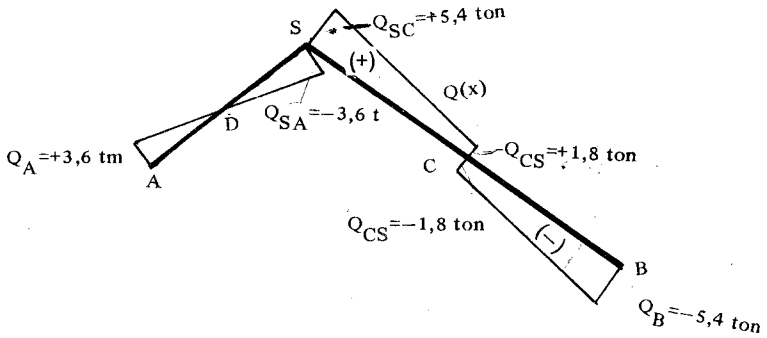
Uraian vertikal H'_B adalah : H_B tg α = 9,5(¼) = 2,375(↑), dan reaksi tumpuan di B sekarang dapat dinyatakan dalam :

V_B = uraian vertikal reaksi tumpuan B
= $V'_B + H_B \operatorname{tg} \alpha = 16{,}125$ ton (↑), dan
H_B = 9,5 ton (←).

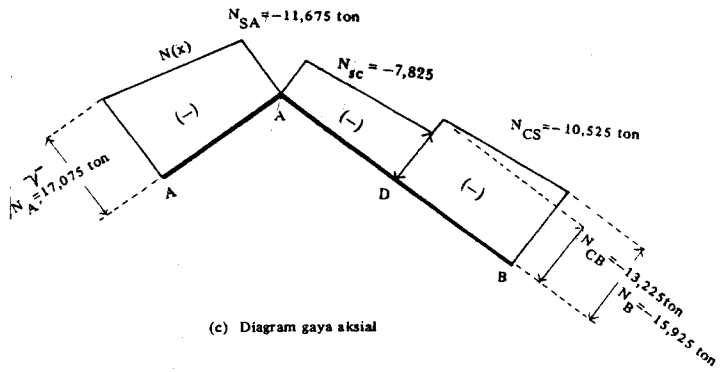
Dengan cara yang sama, seperti dalam contoh 2.6.C di muka, diagram gaya-gaya dalam bangunan dapat kita peroleh seperti dalam gambar 2.6.D.5.



a) Diagram momen lentur



b) Diagram gaya lintang



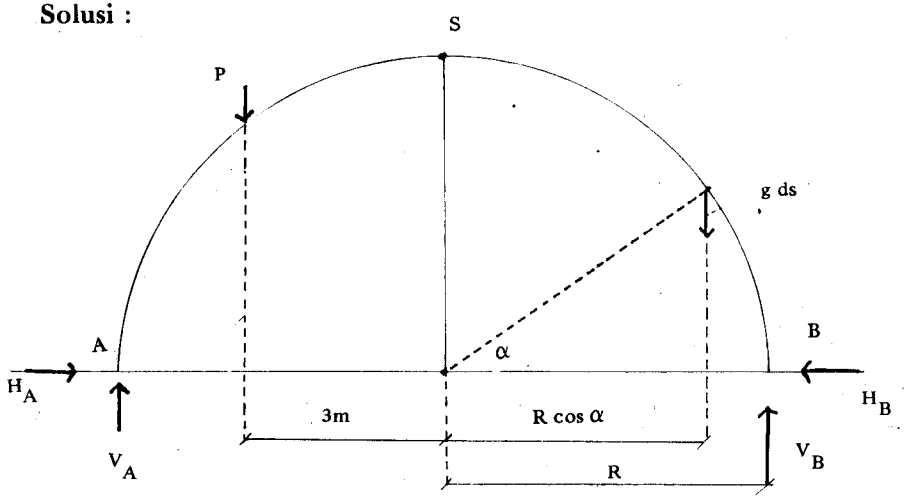
(c) Diagram gaya aksial

gambar 2.6.D.5

Contoh 2.6.E :

Pelengkung tiga sendi berbentuk setengah lingkaran yang berjejari R = 5 meter menahan beratnya sendiri sebesar g = 120 kg/m dan beban P = 2 ton di titik C, 3 meter di sebelah kiri sendi S (gambar 2.6.E.1), S terletak di tengah-tengah. Tentukanlah hanya diagram momen lenturnya.

Solusi :



gambar 2.6.E.1

Sebagaimana biasa, kita uraikan gaya reaksi tumpuan ke arah vertikal dan ke arah garis AB, *garis penghubung tumpuannya* yang kali ini horisontal.

Ambil momen di B yang harus sama dengan nol :

$$V_A\,(2R) - \int_S (g\,ds)(R - R\cos\alpha) - P(R+3) = 0$$

Gantilah $ds = R\,d\alpha$, sehingga kita peroleh :

$$V_A = \frac{1}{2R}[P(R+3) + R^2(g)\int_0^{\pi}(1-\cos\alpha)d\alpha] \quad (2.6.E.1)$$

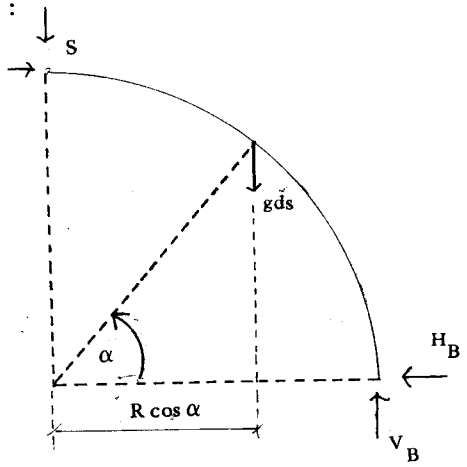
Masukkan besaran yang diberikan ke dalam (2.6.E.1).

$$V_A = \frac{8}{10}(2000)\text{kg} + (5)(60)(\pi)\text{ kg}$$
$$= 2542{,}478\text{ kg}$$

Dan mudah dihitung bahwa

$$V_B = \frac{2}{10}(2000)\text{kg} + (5)(60)(\pi)\text{ kg} = 1342{,}478\text{ kg}$$

Untuk menghitung H_B kita gunakan diagram raga-lepas BS (gambar 2.6.E.2) :



gambar 2.6.E.2

Ambil momen di sendi S yang harus sama dengan nol,

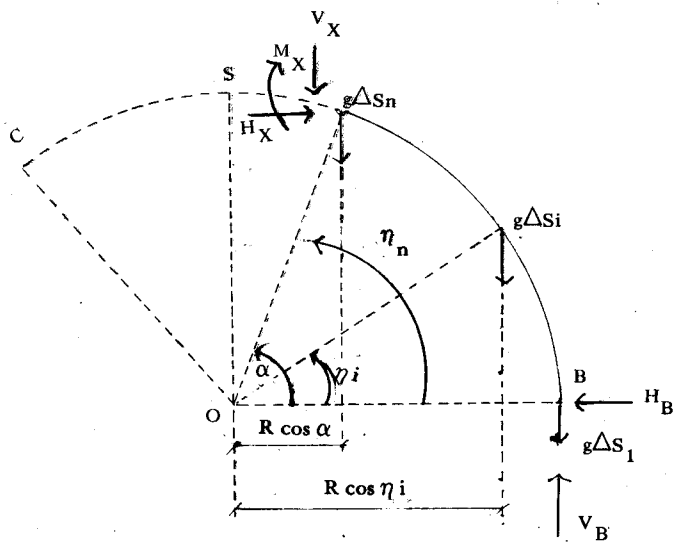
$$-V_B(R) + (g\,ds)\,R\cos\alpha + H_B(R) = 0$$

$$H_B = V_B - gR\int_0^{\pi/2}\cos\alpha\,d\alpha \quad . \qquad (2.6.E.2)$$

Masukkan besaran yang diketahui ke dalam (2.6.E.2),

$$H_B = 1342{,}478\text{ kg} - (120)(5)\text{ kg} = 742{,}478\text{ kg}$$

$H_A = H_B = 742{,}478$ kg, karena semua gaya lainnya vertikal. Tinjaulah bagian ASC (gambar 2.6.E.3) :



gambar 2.6.E.3

Untuk menentukan diagram momen lenturnya, gaya-gaya tidak usah diuraikan dalam arah tangensial dan arah normal terhadap busur lingkaran, tetapi untuk penentuan letak suatu titik pada busur lingkaran kita gunakan koordinat polar, dengan pusat lingkaran tersebut sebagai pusat

koordinatnya, titik 0. Jadi di titik X dengan OX membentuk sudut α dengan OB, akan terjadi momen lentur :

1. Akibat reaksi tumpuan di B sebesar :

$$M_1 = V_B\,(R - R\cos\alpha) - H_B\,(R\sin\alpha) \qquad (2.6.E.3)$$

2. Akibat berat busur sendiri sebesar :

$$M_2 = -(g)(\Delta s_1)\,(R\cos\eta_1 - R\cos\alpha) - \ldots$$
$$-(g)\,(\Delta s_i)(R\cos\eta_i - R\cos\alpha) - \ldots$$
$$-(g)(\Delta s_n)\,(R\cos\eta_n - R\cos\alpha) \qquad (2.6.E.4)$$

$$M_2 = -\left(\sum_{i=1}^{n} g\,(\Delta s_i)\,(R\cos\eta_i - R\cos\alpha)\right) \qquad (2.6.E.5)$$

Untuk $\Delta s_i \to 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$
(2.6.E.5) menjadi :

$$M_2 = -\int_0^{\alpha} g\,(R\,d\eta)\,(R\cos\eta - R\cos\alpha)$$

$$M_2 = -\,g\,R^2\,(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) \qquad (2.6.E.6)$$

Alhasil kita peroleh momen di titik X sebesar :

$$M_X = M_1 + M_2$$
$$= V_B(R - R\cos\alpha - H_B(R\sin\alpha) - gR^2\,(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$$
$$M_X = -R\cos\alpha\,(V_B - \alpha\,g\,R) - R\sin\alpha\,(H_B + gR) + V_B\,R \qquad (2.6.E.7)$$

Dengan cara serupa bisa kita turunkan persamaan momen lentur untuk bagian AC, cobalah !

Dengan memasukkan besaran yang diberikan dan telah dihitung, alhasil kita peroleh :

$$M_X = -((6712{,}39 - 3000\,\alpha)\cos\alpha + 6712{,}39\sin\alpha - 6712{,}39)\ \text{kgm}$$

Tentu saja penggambaran diagram dengan fungsi seperti di atas tidak mudah, tetapi untuk gambaran kualitatif biasanya (seperti penggambaran grafik fungsi dalam koordinat polar) ditempuh cara berikut :

Buatlah sinar-sinar yang membentuk sudut-sudut tertentu dengan OB, misalnya untuk $\alpha = \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ dan arc tg $(-4/3)$, yakni sinar OC (titik C), lalu hitunglah besar M_X untuk sudut-sudut tersebut :

α (radial)	M(kgm)
$\frac{\pi}{6}$	−1096,55
$\frac{\pi}{4}$	−1114,282
$\frac{\pi}{3}$	− 866,109
$\frac{\pi}{2}$	0
2,214	1382,979

Hasilnya bila dilihat dalam gambar 2.6.E.4 berikut ini :

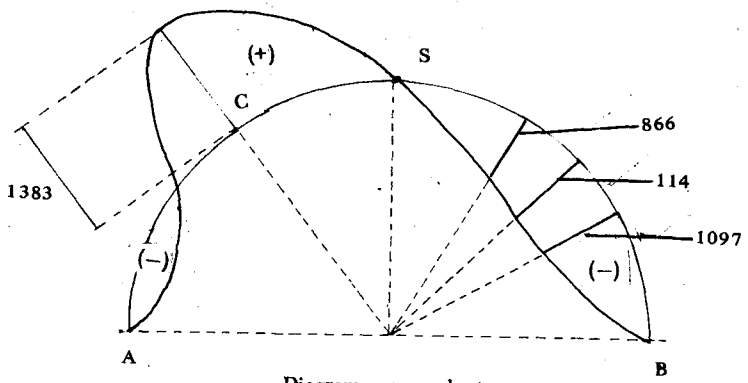
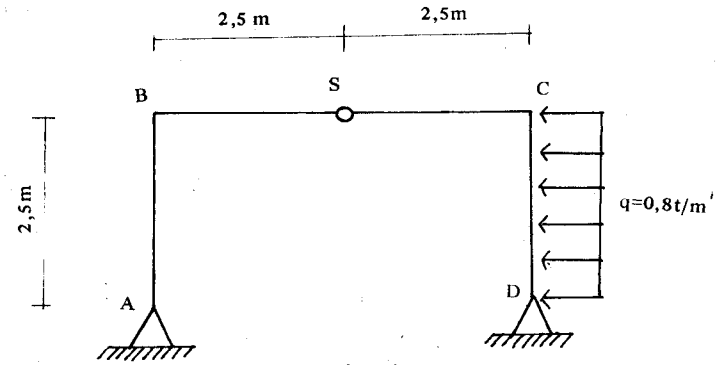


Diagram momen lentur

gambar 2.6.E.4

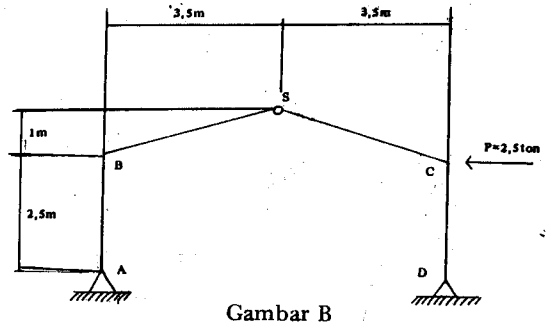
2.6.SL SOAL LATIHAN

1. Portal tiga sendi ABSCD menahan beban horisontal q = 0,8 t/m' di sepanjang batang CD (gambar A). Berat batang ABS dan SCD adalah g = 0,7 t/m'. Tentukanlah reaksi tumpuan A dan D, dan gambarkanlah diagram momen lentur, gaya lintang dan gaya aksial bangunan.



Gambar A

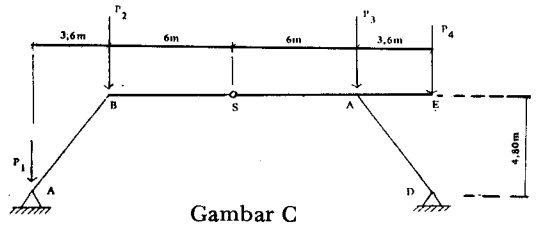
2. Bangunan tiga sendi ABSCD (gambar B) menahan beban horisontal P = 2,5 ton yang bekerja di C. Berat batang ABS dan SCD adalah g = 0,85 t/m'. Tentukanlah reaksi tumpuan A dan D, dan gambarkanlah diagram momen lentur, gaya lintang dan gaya aksial bangunan tersebut.



Gambar B

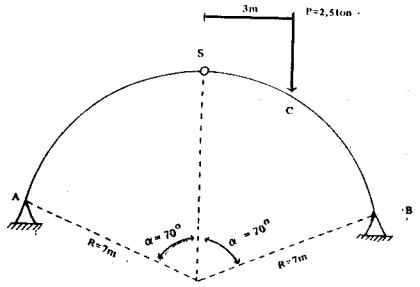
3. Bangunan tiga sendi ABSD (gambar C) menahan beratnya sendiri, g = 1,8 t/m', dan beban luar sebagai berikut:
   P_1 = 2 ton bekerja vertikal di A;
   P_2 = 4 ton bekerja vertikal di B;
   P_3 = 4 ton bekerja vertikal di C;
   P_4 = 2 ton bekerja vertikal di E

   Tentukanlah diagram momen lentur, gaya lintang dan gaya aksial bangunan tersebut.



Gambar C

4. Pelengkung tiga sendi berbentuk "sebagian-lingkaran" (gambar D) menahan beratnya sendiri, g = 200 kg/m', dan beban vertikal P = 2,5 ton di C, 3 meter di sebelah kanan sendi S. Jejari lingkaran pelengkung R = 7 m. Tentukanlah diagram momen lenturnya.



Gambar D

BAB III
KABEL

Perhatikanlah benang atau kalung berbentuk rantai. Dalam bentuk mini, benda yang akan kita bicarakan sangat menyerupai rantai atau benang, baik bentuk maupun sifatnya yang lemas, tidak dapat menahan momen dan hanya mampu menahan gaya tarik aksial saja. Apa yang terjadi apabila sebuah kalung kita gantung pada kedua ujungnya, atau apabila padanya kita gantungkan sebuah benda ? Lalu bayangkanlah kabel transmisi, kereta gantung atau jembatan gantung, beberapa contoh nyata dalam bangunan sipil yang dapat kita jumpai sehari-hari.

Nah, sebelum kita lanjutkan pembahasan tentang benang yang sudah kita "kenal" tersebut, marilah kita tentukan dulu secara teknikal definisi tentang benda yang kita namakan, sebut saja *kabel.*

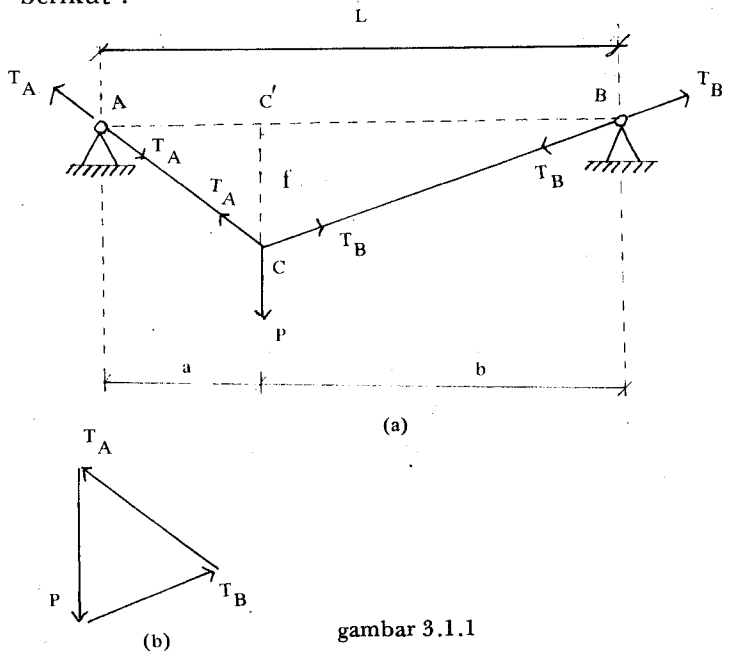
Definisi : Kabel adalah suatu struktur berbentuk tali yang tidak dapat menahan momen dan hanya mampu menahan gaya tarik aksial.

3.1. Kabel dengan Beban Terpusat :

Umumnya, beban terpusat yang harus dipikul kabel jauh lebih berat daripada berat kabel itu sendiri, oleh karena itu berat kabel sementara ini kita abaikan dulu.

Tinjaulah bangunan dalam gambar 3.1.1.a, ini persoalan yang sudah kita kenal bukan ? Melalui diagram gaya pada gambar 3.1.1.b dengan mudah bisa kita hitung besarnya T_A dan T_B, yakni reaksi perletakan A dan B.
Tetapi itu tidak menarik untuk dibahas, tentu, karena hal tersebut hanyalah merupakan persoalan kesetimbangan gaya-gaya yang bekerja pada sistem bangunan tersebut.

Tetapi marilah kita ulas lebih jauh secara analitik sebagai berikut :



gambar 3.1.1

Seperti biasa, reaksi tumpuan T_A dan T_B kita uraian dalam arah vertikal V_A dan V_B serta arah horisontal H_A dan H_B. Ambil momen di tumpuan A dan B, kita peroleh :

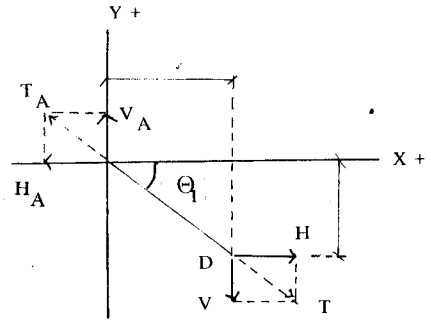
$$V_A = P\frac{b}{L}$$

$$V_B = P\frac{a}{L}$$

dengan :

a = jarak beban vertikal P ke tumpuan A
b = jarak P ke tumpuan B
L = a + b = jarak tumpuan A ke tumpuan B, ketinggian A dan B sama.

H_A harus sama dengan H_B karena gaya lainnya tidak ada yang horisontal, dan besarnya dapat kita tentukan dengan berbagai cara. Tetapi tinjaulah raga-lepas AD, D sembarang titik pada kabel bagian AC. Untuk mudahnya, buatlah sistem koordinat Cartesian seperti dalam gambar 3.1.2.



gambar 3.1.2

Berdasarkan sifat kabel yang tidak dapat menahan momen dapatlah kita simpulkan bahwa *setiap titik* pada kabel dapat kita anggap sebagai *sendi*. Jadi, ambillah momen di titik D(x,y) pada raga-lepas AD = 0, kita peroleh :

$$H_A = \frac{V_A\, x}{y} \quad (\leftarrow) \qquad (3.1.1)$$

Dari (3.1.1) dapat kita simpulkan bahwa jika salah satu koordinat atau kedudukan relatif suatu titik pada kabel telah kita ketahui, besarnya H_A dapat kita hitung; khususnya di titik C(a,f) persamaan (3.1.1) menjadi :

$$H_A = \frac{V_A\, a}{f} \quad (\leftarrow) \qquad (3.1.2)$$

Selanjutnya, karena D(x,y) adalah titik sembarang dan gaya reaksi T_A tetap, maka dapatlah disimpulkan bahwa uraian horisontal gaya-dalam di setiap titik pada kabel selalu tetap besarnya, yakni :

$$H = H_A$$

Demikian juga halnya apabila raga-lepas bagian BC yang kita tinjau, akan kita dapatkan

$$H = H_B$$

Dan karena $H_A = H_B$ (tidak ada gaya lain yang horisontal) maka dapatlah kita simpulkan bahwa :

1. Uraian horisontal gaya-dalam kabel pada setiap titik selalu sama besar dan sama dengan besarnya uraian horisontal gaya reaksi perletakannya.

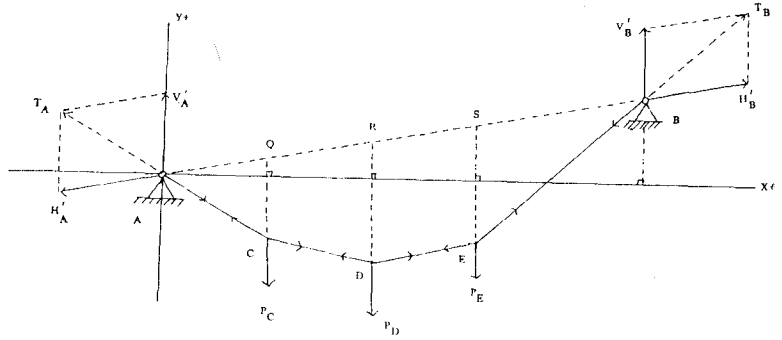
   Dan karena H adalah uraian horisontal gaya-dalam yang bersangkutan, sebutlah T_i, maka jika Θ_i adalah sudut antara T_i dengan garis horisontal, besarnya T_i dapat kita tentukan dengan rumus :

   $$T_i = H \sec \Theta_i \qquad (3.1.3)$$

   Sehingga bolehlah kita simpulkan bahwa :

2. Gaya-dalam kabel (T_i) terbesar akan terjadi pada bagian kabel yang membentuk sudut (Θ_i) terbesar dengan garis horisontal (ingat bahwa kabel hanya mampu menahan gaya tarik aksial).

Hal yang sama juga terjadi pada kabel yang memikul beberapa beban terpusat vertikal. Sebagai contoh, marilah kita tinjau kabel ACDEB (gambar 4.1.5) yang memikul beban-beban terpusat vertikal di titik C ($= P_C$), D ($= P_D$) dan E ($= P_E$).



gambar 3.1.3

Seperti biasa, reaksi perletakan T_A dan T_B kita uraikan dalam arah vertikal V'_A dan V'_B dan dalam arah garis *AB (bukan* garis horisontal), H'_A dan H'_B . Kemudian buatlah sistem koordinat Cartesian seperti dalam gambar 3.1.3, lalu ambillah momen di titik A (yang harus sama dengan nol) untuk menentukan V'_B (atau di titik B untuk menentukan V'_A), yakni :

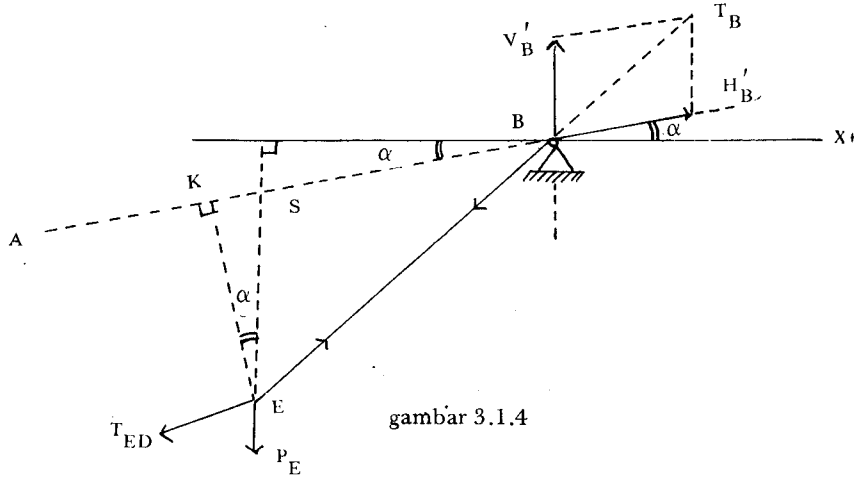
$$V'_B = \frac{1}{x_B}(x_C P_C + x_D P_D + x_E P_E) \qquad (3.1.4)$$

Kemudian untuk menentukan T_B (atau T_A) kita tentukan dulu H'_B ($= H'_A$), karenatidak ada gaya lain yang punya uraian-gaya dalam arah AB). Ambillah diagram raga-lepas EB, supaya mudah (gambar 3.1.4). Berdasarkan sifat kabel yang tidak dapat menahan momen, tentulah momen di titik E juga sama dengan nol, sehingga kita peroleh :

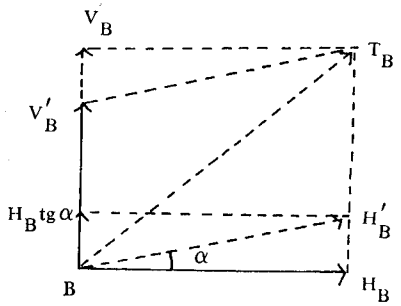
$$H'_B \overline{EK} = V'_B (x_B - x_E) \qquad (3.1.5)$$

dengan :

$\overline{EK}$ = jarak titik E ke garis AB
x_B = absis titik B dan
x_E = absis titik E;



gambar 3.1.4



gambar 3.1.5

Sekarang uraikanlah gaya H'_B dalam arah *horisontal* dan arah vertikal, sebutlah uraian H'_B dalam arah horisontal sebagai H'_B, maka uraian vertikalnya tentulah H_B tg α (gambar 3.1.5), dengan α = sudut antara H'_B (atau garis AB) dengan garis horisontal. Karena segitiga EKS (gambar 3.1.4) dengan segitiga BH'_B H_B (gambar 3.15) sebangun, maka :

$$\overline{EK}\, H'_B = \overline{ES}\, H_B$$

sehingga persamaan (3.1.5) menjadi :

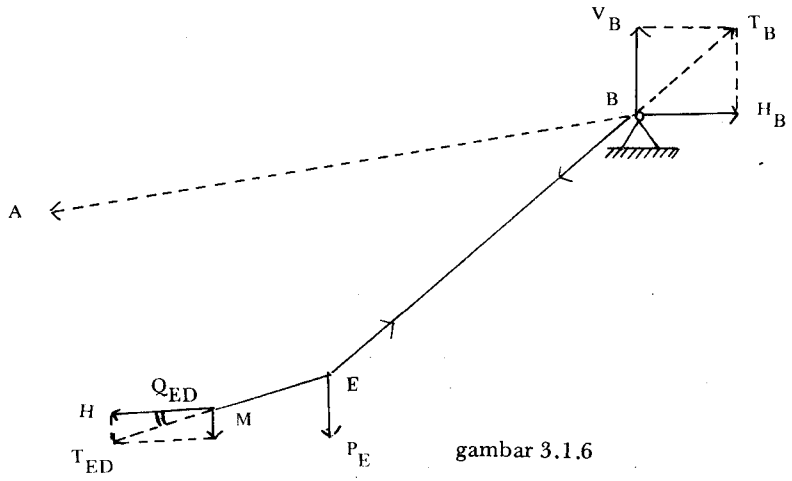
$$H_B = \frac{V'_B\,(x_B - x_A)}{\overline{ES}} \qquad (3.1.6)$$

dengan :

S = titik potong garis AB dengan garis vertikal melalui E.

Alhasil, jika T_B kita uraikan dalam arah horisontal dan arah vertikal, maka uraian horisontalnya, H_B, dapat kita tentukan berdasarkan rumus (3.1.6), sedangkan uraian vertikalnya, $V_B = V'_B + H_B$, tg α, dengan α sudut antara garis hubung titik tumpuan A dan B, dengan garis horisontal, dan V'_B dapat ditentukan dari (3.1.4).

Baiklah, reaksi perletakannya sudah dapat kita hitung, selanjutnya marilah kita tentukan gaya-dalam pada setiap bagian kabel. Untuk itu, tanpa kehilangan sifat keumumannya, tinjaulah gaya-dalam kabel pada bagian DE dan "potonglah" bagian tersebut di titik M (x,y), lalu tinjaulah kesetimbangan gaya-gaya yang berarah horisontal pada ragalepas MEB (gambar 3.1.6), setelah semua gayanya kita uraikan dalam arah horisontal dan vertikal.



gambar 3.1.6

Sebutlah uraian horisontal gaya-dalam T_{ED} sebagai H, maka tentulah $H = H_B$, dan H_B telah kita ketahui bukan ? Dan apabila sudut antara gaya-dalam T_{ED} dengan arah horisontal telah diketahui, misalkan besarnya = Θ_{ED}, besarnya T_{ED} sendiri mudah ditentukan karena

$$T_{ED} = H \sec \Theta_{ED} = H_B \sec \Theta_{ED}$$

Dan tentu saja kita tahu bahwa arah gaya T_{ED} harus sama dengan arah bagian kabel yang bersangkutan, yakni arah ED karena kabel hanya dapat menahan gaya tarik aksial.

Mudah dibuktikan, bahwa hal yang serupa juga berlaku untuk bagian kabel lainnya, sehingga seluruh persoalan dapat dikumpulkan menjadi satu persoalan pokok, yakni : Besarnya uraian horisontal reaksi tumpuan, atau $H = H_A = H_B$. Sekali kita tahu H, semua gaya-dalam kabel dapat ditentukan dengan rumus :

$$T_i = H \sec \Theta_i \qquad (3.1.7)$$

dengan :

Θ_i = sudut bagian kabel yang bersangkutan dengan garis horisontal.

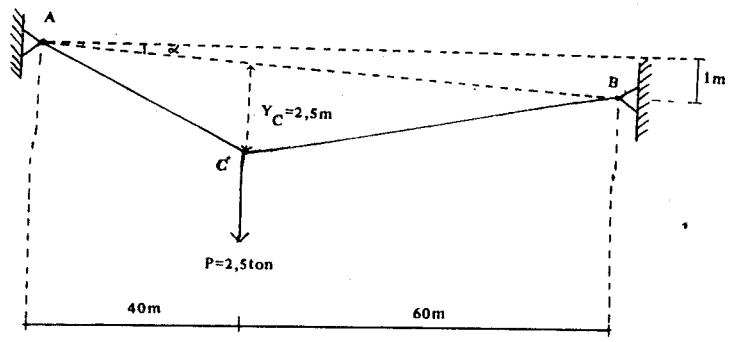
H = uraian horisontal gaya reaksi tumpuan.

Tentu saja, diperlukan juga penyesuaian arahnya karena rumus (3.1.7) hanya berbicara tentang besarnya gaya.

Jadi, kesimpulan yang sama seperti contoh sebelumnya juga berlaku, yakni :

1. Uraian horisontal gaya-dalam setiap bagian kabel selalu sama besar dan besarnya sama dengan uraian horisontal reaksi perletakannya.
2. Gaya-dalam terbesar akan terjadi pada bagian kabel yang membentuk sudut terbesar dengan garis horisontal.

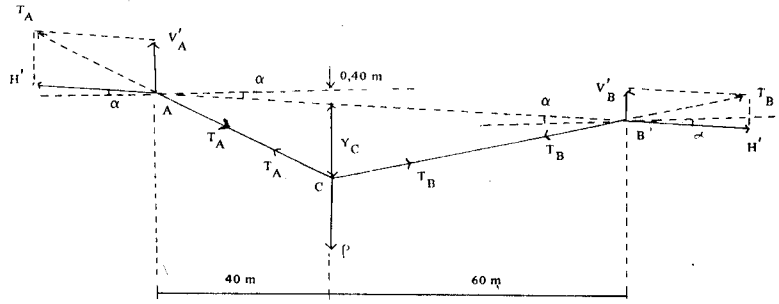
Contoh 3.1.A:



gambar 3.1.A.1

Kabel AB dalam gambar 3.1.A.1, memikul beban terpusat P = 2,5 ton di titik C yang terletak pada jarak horisontal 40 m dari titik tumpuan A atau 60 m dari titik tumpuan B. Titik A lebih tinggi 1 m daripada titik B. Kabel yang digunakan tertentu panjangnya, sehingga jarak vertikal C ke tali-busur AB adalah y_C = 2,5 m. Tentukanlah gaya-dalam kabel di bagian AC dan BC.

Solusi :



gambar 3.1.A.2

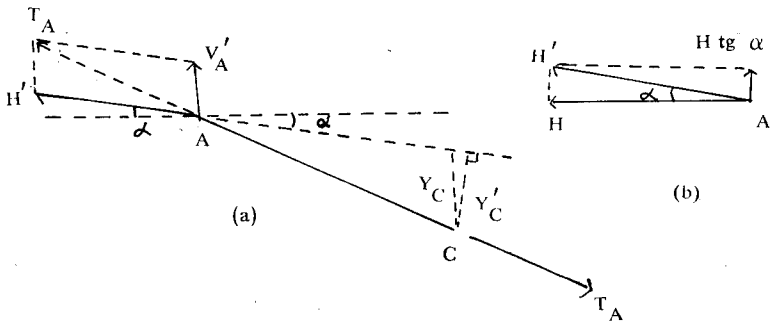
Reaksi tumpuan di A yang sama besarnya dengan gaya dalam kabel di bagian AC kita nyatakan dengan T_A ; dan reaksi tumpuan di B yang sama besarnya dengan gaya tarik kabel di bagian BC kita nyatakan dengan T_B .

Dan untuk pemudahan, T_A kita uraikan dulu dalam komponen vertikal (V'_A) dan komponen // AB (H') : juga T_B kita uraikan dalam komponen vertikal (V'_B) dan komponen // AB (H')

Jumlah momen terhadap titik B yang sama dengan nol menghasilkan :

V'_A = 1,5 ton

Dan jumlah momen terhadap titik C pada *raga-lepas AC* (gambar 4.1.A.3) yang sama dengan nol menghasilkan :



gambar 3.1.A.3

$V'_A\ 40 - H'y'_C$ = 0, sedangkan

$H'y'_C = H\ y_C$

sehingga

$V'_A\ 40 - H\ y_C = 0$ dan H = 24 ton

(H = uraian horisontal gaya H')

Jika Θ_1 kita nyatakan sebagai sudut antara bagian kabel AC dengan garis horisontal, dan Θ_2 sebagai sudut antara bagian kabel BC dengan garis horisontal; maka dari gambar 3.1.A.4 akan diperoleh :

sec Θ_1 = 1,003 dan sec Θ_2 = 1,0005

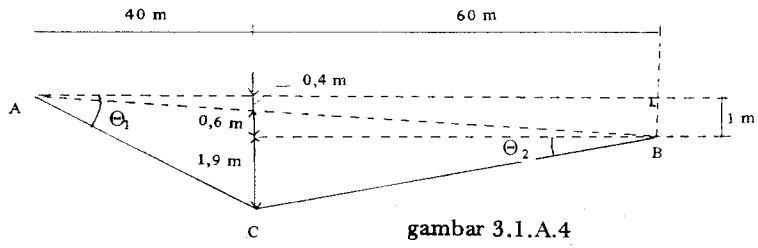
Dari rumus (3.1.7) dapat diperoleh :

T_A = gaya tarik kabel di bagian AC = H sec Θ_1 = 24,072 ton

dan

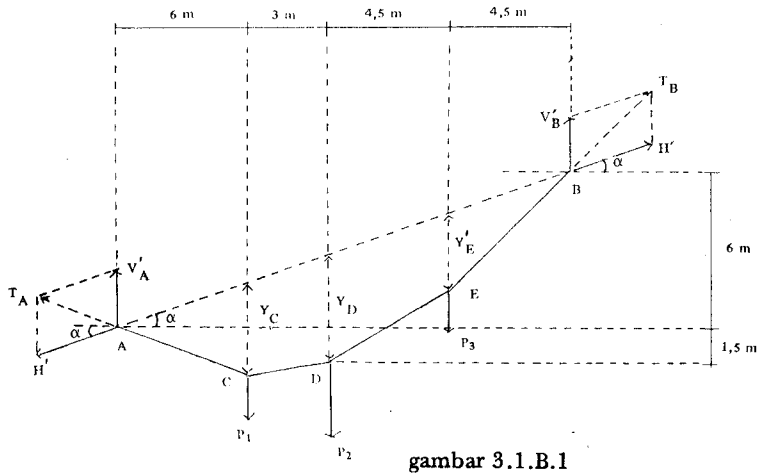
T_B = gaya tarik kabel di bagian BC = H sec Θ_2 = 24,012 ton

Terlihat bahwa gaya tarik *maksimum* terjadi di bagian AC, bagian kabel yang membentuk *sudut paling besar* dengan garis horisontal.



gambar 3.1.A.4

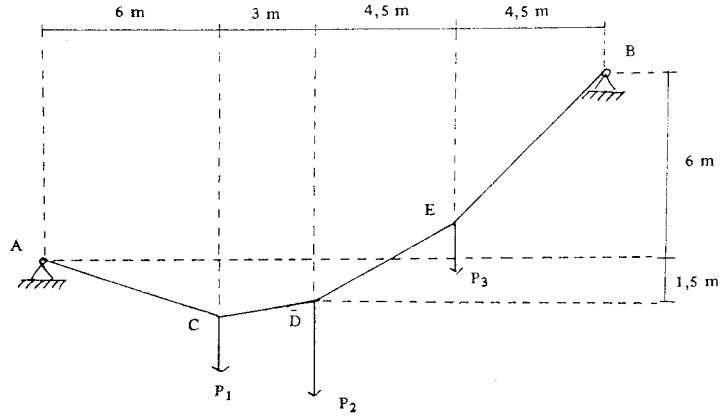
Contoh 3.1.B:



gambar 3.1.B.1

Kabel AB memikul beban terpusat P_1 = 3 ton di titik C, P_2 = 6 ton di titik D dan P_3 = 2 ton di titik E (gambar 3.1.B.1). Jarak titik A ke P_1, P_2 dan P_3 masing-masing adalah 6 m, 3 m dan 4,5 m. Titik A lebih rendah 6 m daripada titik B, dan titik D lebih rendah 1,5 m daripada titik A. Tentukanlah kedudukan relatif titik C dan titik D, serta hitunglah gaya-dalam kabel terbesar yang terjadi.

Solusi :



gambar 3.1.B.2

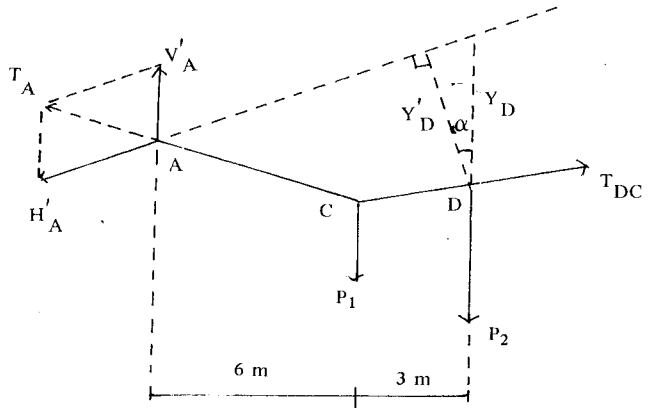
Seperti biasa, uraikanlah gaya reaksi tumpuan A dan B dalam arah vertikal V'_A dan V'_B serta dalam arah AB. Ambil momen di titik B untuk mendapatkan V'_A yakni :

$$V'_A = \frac{1}{18}[(12)(3) + (9)(6) + (4,5)(2)] = 5,5 \text{ ton.}$$

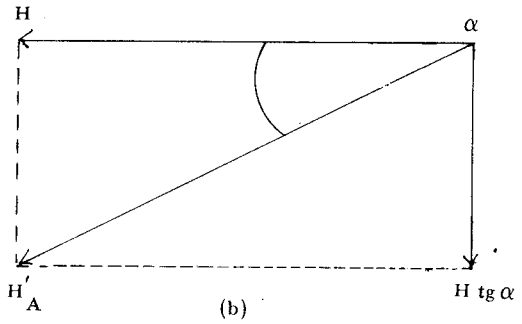
Untuk menentukan H perlu kita tentukan dulu suatu titik pada kabel yang letaknya telah tertentu, dalam hal ini tentulah titik D. Dan dari gambar 3.1.B.2 mudah ditentukan bahwa

$$y_D = [1,5 + \frac{9}{18}(6)] \text{ m} = 4,5 \text{ m}$$

Dan dari jumlah momen terhadap titik D pada *raga-lepas ACD* (gambar 4.1.B.3) yang harus sama dengan nol kita peroleh :



(a)



(b)

gambar 3.1.B.3

$V'_A\,9 - H'_A\,y'_D - P_1\,3 = 0$

$H'_A\,y_D = 5{,}5(9) - 3(3) = 40{,}5$

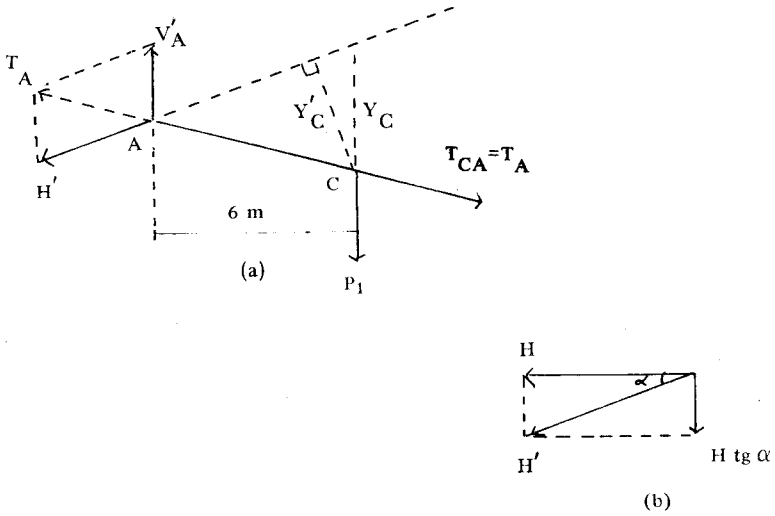
Tapi

$H'_A\,y'_D = H\,y_D$, sehingga

$$H = \frac{40{,}5}{4{,}5} = 9 \text{ ton}$$

(H = uraian horisontal gaya H'_A)

Kedudukan relatif titik C dapat ditentukan dengan meninjau kesetimbangan raga-lepas AC (gambar 4.1.B.4) :



gambar 3.1.B.4

$\Sigma M_C = 0$; $V'_A\,6 - H'y'_C = 0$

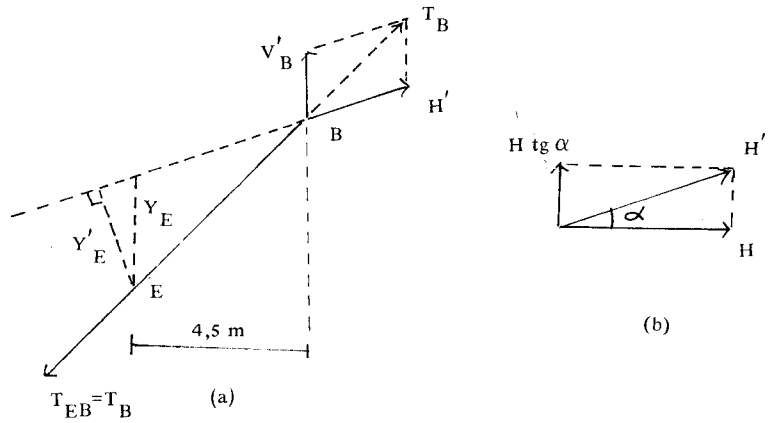
Sedangkan $H'\,y'_C = H\,y_C$, sehingga :

$5{,}5(6) - 9\,y_C = 0$, dan

y_C = jarak vertikal C ke tali-busur AB

= 3,67 m.

Kedudukan relatif titik E dapat ditentukan dengan meninjau kesetimbangan raga-lepas BE (gambar 4.1.B.5) :



gambar 3.1.B.5

$M_E = 0$; $V'_B\,4{,}5 - H'\,y'_E = 0$.

Sedangkan $H'\,y'_E = H\,y_E$, sehingga :

$V'_B\,4{,}5 - H\,y_E = 0$, dan

y_E = jarak vertikal E ke tali-busur AB

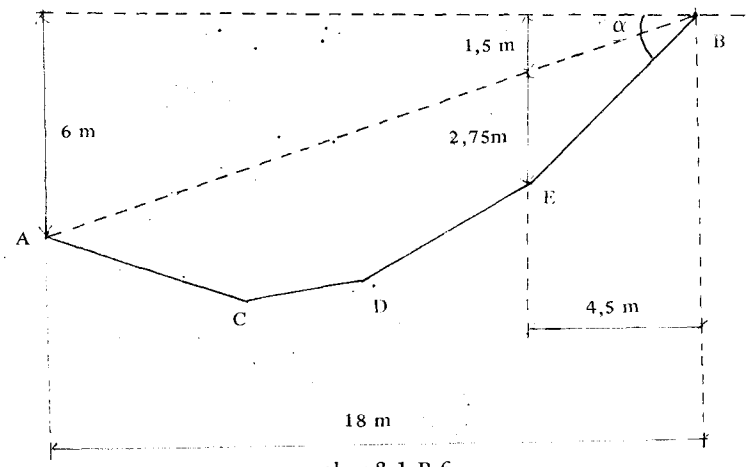
= 2,75 m.

Gaya tarik maksimum akan terjadi di bagian BE, bagian kabel yang membentuk sudut paling besar dengan garis horisontal. Sudut antara BE dan garis horisontal tersebut adalah (gambar 3.1.B.6) :

$$\Theta = \text{arc tg } \left(\frac{1{,}5 + 2{,}75}{4{,}5}\right)$$

= arc tg 0,9444, sehingga

sec Θ = 1,3755



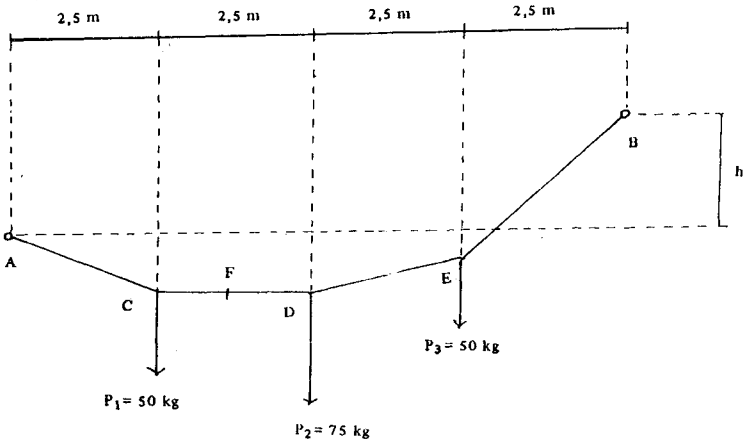
gambar 3.1.B.6

Dan dari rumus (3.1.7) kita peroleh :

$T_{EB} = T_B = H \sec \Theta = 12{,}3795$ ton,

yang merupakan gaya tarik maksimum pada kabel.

Contoh 3.1.C :

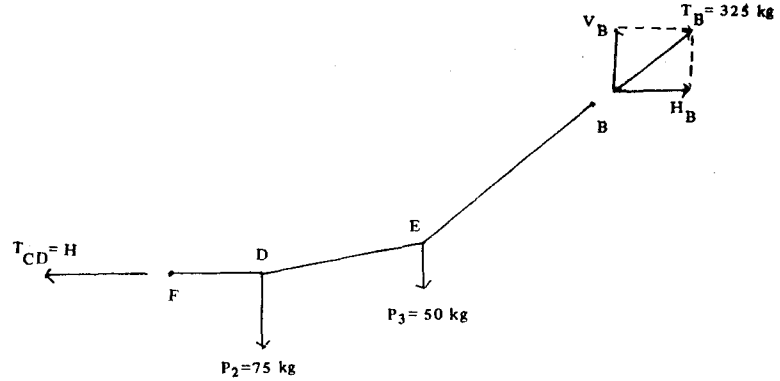


gambar 3.1.C.1

Kabel ACDEB (gambar 3.1.C.1) memikul beban terpusat vertikal P_1 di C (= 50 kg), P_2 di D (=75 kg) dan P_3 di E (= 50 kg). Jarak A ke P_1 = jarak P_1 ke P_2 = jarak P_2 ke P_3 = jarak P_3 ke B = 2,5 m. Tentukanlah beda tinggi antara A dan B (= h), agar bagian CD berkedudukan horisontal dan gaya tarik maksimum yang terjadi pada kabel adalah 325 kg.

Solusi :

Agar kabel bagian CD horisontal, gaya-dalam kabel di bagian CD akan sama besar dengan H, uraian horisontal gaya-gaya reaksi tumpuan (gambar 3.1.C.2, raga-lepas BEDF).



gambar 3.1.C.2

Gaya-dalam maksimum akan terjadi di bagian BE, bagian kabel yang membentuk sudut paling besar dengan garis horisontal; dan besar gaya-dalam maksimum ini adalah T_B sama dengan gaya reaksi tumpuan di B. Tidak seperti biasanya, untuk ini T_B tidak perlu diuraikan dalam arah AB, tapi nyatakan saja dalam uraian vertikal (= V_B) dan uraian horisontal (= H_B), dan dari kesetimbangan raga-lepas BEDF (gambar 3.1.C.2) kita peroleh :

$V_B = 75 \text{ kg} + 50 \text{ kg} = 125 \text{ kg}.$

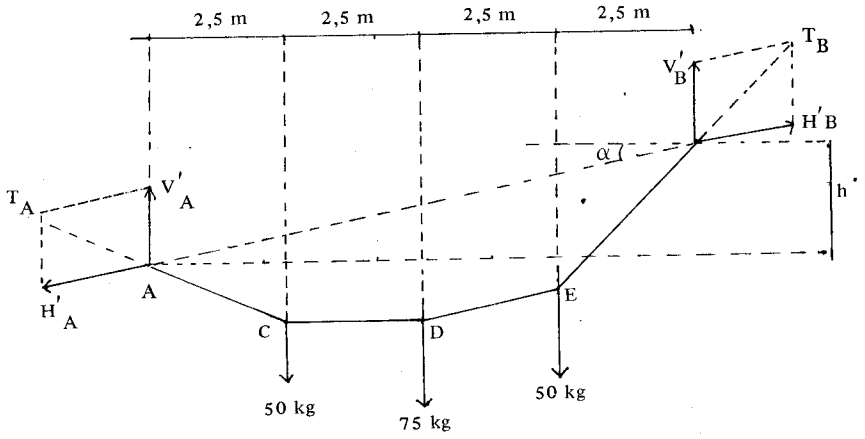
Sedangkan T_B telah disyaratkan harus sama dengan 325 kg, sehingga :

$$H_B = \sqrt{T_B^2 - V_B^2}$$

atau

$H_B = 300$ kg.

Tapi T_B dapat juga diuraikan dalam komponen vertikal ($= V'_B$) dan komponen // AB ($= H'_B$) – lihat gambar 3.1.C.3



gambar 3.1.C.3

Dan dengan mengambil jumlah momen terhadap titik A yang sama dengan nol, kita peroleh :

$V'_B = 87{,}5$ kg.

Sedangkan,

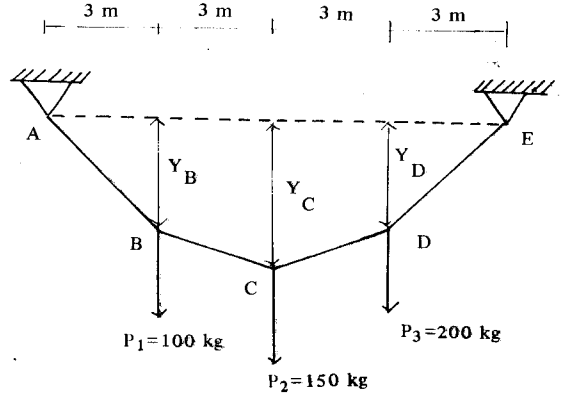
$V_B = V'_B + H \operatorname{tg} \alpha$, atau

$125 = 87{,}5 + 300\ h/10$

sehingga : h, beda tinggi antara A dan B = 1,25 m.

3.1.SL SOAL LATIHAN

1. Kabel ABCDE (gambar A) memikul beban terpusat : $P_1 = 100$ kg di B, $P_2 = 150$ kg di C dan $P_3 = 200$ kg di D. Tentukanlah reaksi tumpuan kabel dan gaya-dalam kabel terbesar yang terjadi, jika $y_C = 2{,}50$ m.

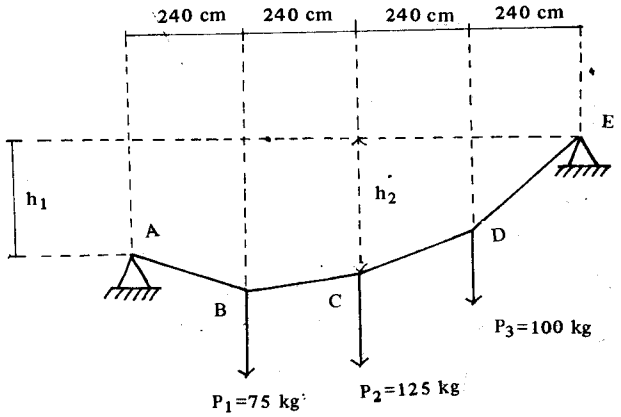


Gambar A

2. Tentukanlah y_C jika gaya-dalam maksimum yang diijinkan terjadi pada kabel ABCDE dalam soal 1 gambar A adalah 700 kg.

3. Kabel ABCDE (gambar B) memikul beban terpusat : $P_1 = 75$ kg di B, $P_2 = 125$ kg di C dan $P_3 = 100$ kg di D. Tentukanlah reaksi tumpuan kabel dan gaya-dalam terbesar yang terjadi pada kabel, jika beda tinggi antara A dan E, $h_1 = 240$ cm dan beda tinggi antara C dan E, $h_2 = 270$ cm.

4. Tentukanlah beda tinggi antara A dan E pada kabel ABCDE dalam soal 3 gambar B agar kedudukan BC horisontal dan gaya-dalam terbesar yang terjadi pada kabel tidak lebih dari 400 kg.



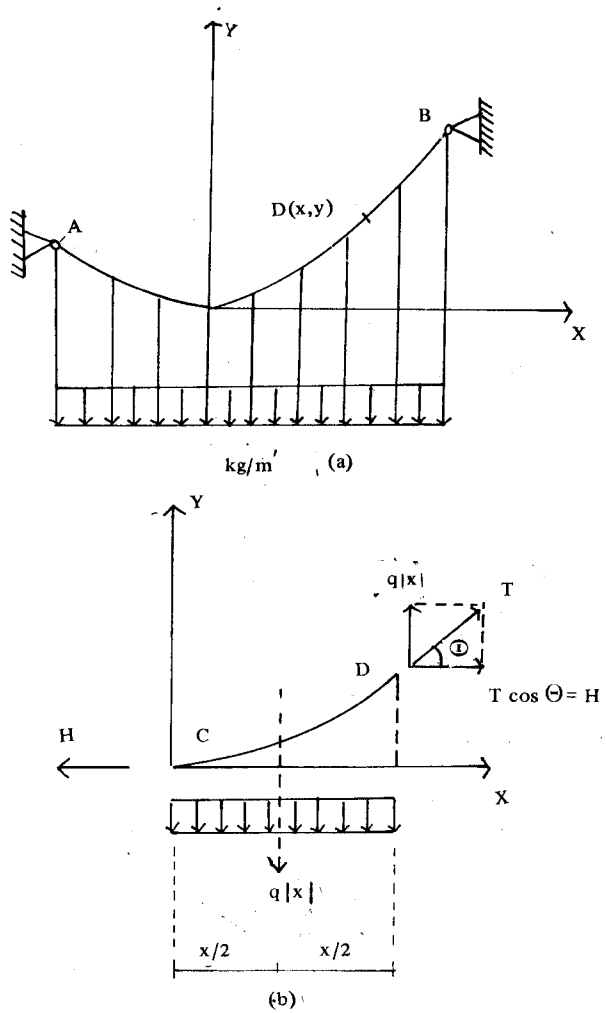
Gambar B

3.2. Kabel dengan Beban Terbagi Rata Sepanjang Garis Horisontal.

Marilah kita tinjau sekarang, kabel AB dengan q yang terbagi rata sepanjang garis horisontal (gambar 3.2.1.a). Pertama, akan kita selidiki bentuk kelengkungan kabel yang terjadi akibat beban tersebut; dan setelah itu, gaya-gaya tarik di setiap penampangnya.

Bentuk kelengkungan kabel, akan kita nyatakan dengan suatu fungsi; untuk itu, kita tentukan suatu sistem koordinat Cartesian dengan C (= titik terendah pada kabel) sebagai titik pangkalnya.

Tinjaulah sekarang *raga-lepas CD* (gambar 3.2.1.b) : Di titik C (0,0) terdapat gaya tarik H yang bekerja horisontal, sesuai dengan arah garis singgung lengkungan kabel di C ; sedangkan di titik sembarang D (x,y) bekerja gaya tarik T yang membentuk sudut Θ dengan garis horisontal, sesuai dengan arah garis singgung lengkungan kabel di D.



gambar 3.2.1

Kesetimbangan raga-lepas CD menghendaki agar jumlah momen terhadap titik D sama dengan nol, sehingga :

$$q|x|\tfrac{1}{2}|x| - H|y| = 0, \text{ atau}$$

$$|y| = \frac{qx^2}{2H}$$

Tapi $|y| = y$, karena $y \geqslant 0$, sehingga

$$y = \frac{qx^2}{2H} \qquad (3.2.1)$$

Persamaan (3.2.1) yang kita dapatkan ini merupakan persamaan lengkungan kabel yang berbentuk parabola. Karenanya, kabel yang memikul beban terbagi rata sepanjang garis horisontal disebut *kabel parabolik*.

Gaya tarik kabel di C, menurut persamaan (3.2.1) di atas adalah

$$H = \frac{qx^2}{2y}, \quad y \neq 0 \qquad (3.2.1.a)$$

Berarti H dapat ditentukan jika koordinat salah satu titik pada kabel diketahui, asal bukan titik C (0,0) tentunya.

Dan dari kesetimbangan raga-lepas CD (gambar 3.2.1.b) – jumlah gaya horisontal sama dengan nol – kita peroleh :

$$T \cos \Theta = H \qquad (3.2.2)$$

dengan : T = gaya tarik kabel pada titik sembarang D (x,y)
Θ = sudut antara garis singgung lengkungan kabel di D dengan garis horisontal.
H = gaya tarik kabel di C, titik terendah pada kabel.

Dari rumus (3.2.2) tersebut dapat kita simpulkan bahwa :

1) Gaya tarik maksimum akan terjadi di suatu titik yang memberikan harga Θ terbesar, salah satu titik tumpuan tentunya.
2) Gaya tarik minimum akan terjadi di titik terendah pada kabel.
3) Uraian horisontal gaya tarik kabel, sama besarnya di setiap titik pada kabel.

Uraian vertikal T harus sama dengan $q|x|$, agar jumlah gaya vertikal pada raga-lepas CD sama dengan nol, sehingga :

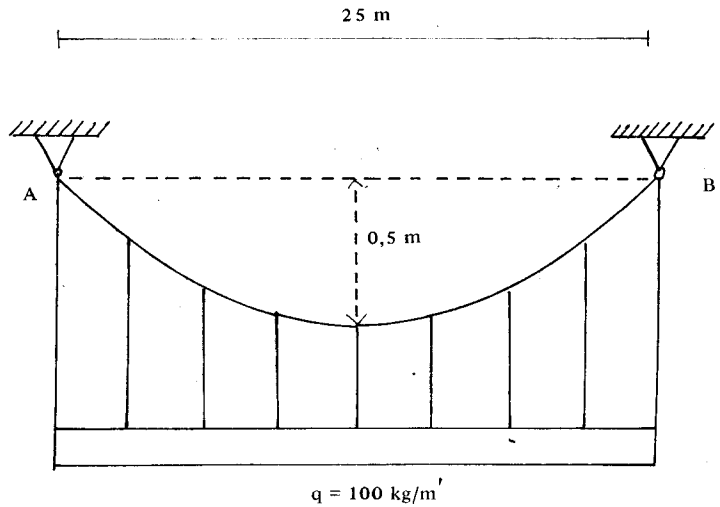
$$T = \sqrt{H^2 + q^2 x^2} \qquad (3.2.3)$$

dengan : T = gaya tarik kabel di titik sembarang D (x,y)
H = uraian horisontal gaya tarik kabel, yang sama besarnya di setiap titik pada kabel.
q = beban kabel per satuan panjang garis horisontal.
x = absis titik yang bersangkutan.

Dan gradien fungsi lengkungan kabel dapat kita nyatakan dengan :

$$y' = \operatorname{tg} \Theta = \frac{q\,x}{H} \qquad (3.2.4)$$

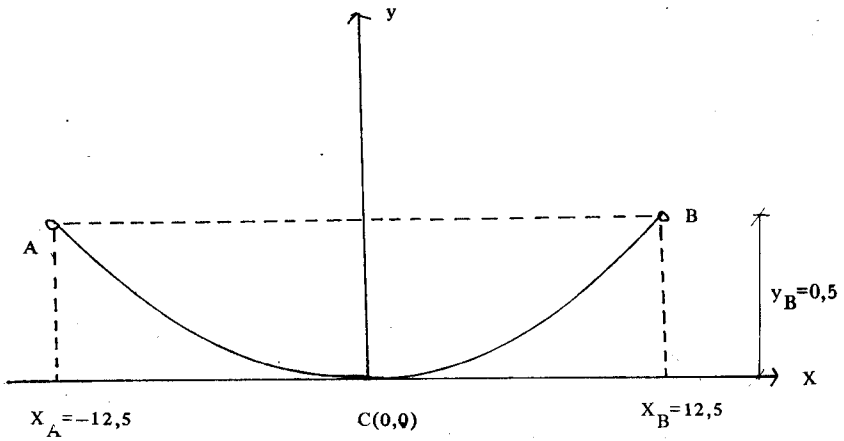
Contoh 3.2.A :



gambar 3.2.A.1

Kabel AB seperti terlihat dalam gambar 3.2.A.1, memikul beban terbagi rata sepanjang garis horisontal sebesar q = 100 kg/m' sepanjang bentang AB = 25 m, titik A dan B sama tingginya, AB berada 0,5 m dari C. Berapakah gaya tarik maksimum dan minimum yang terjadi pada kabel tersebut ?

Solusi :



gambar 3.2.A.2

Kita tentukan dulu sistem koordinat Cartesian dengan C sebagai titik pangkalnya (gambar 3.2.A.2).

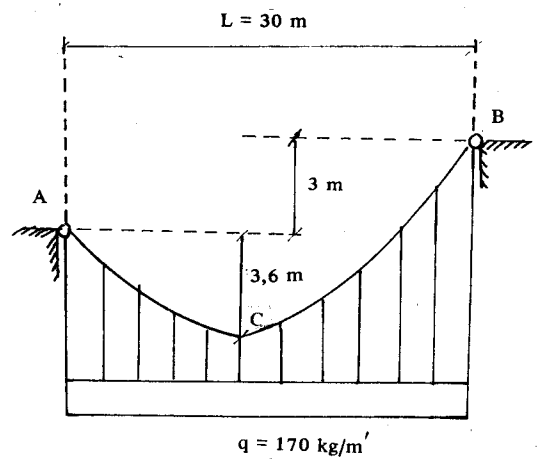
Gaya tarik minimum terjadi di C, sebesar :

$$H = \frac{q\,x_B^2}{2\,y_B} = \frac{100\,(12,5)^2}{2\,(0,5)} = 15625 \text{ kg} = 15,625 \text{ ton}$$

Gaya tarik maksimum terjadi di titik A dan B, sebesar :

$T_A = T_B = \sqrt{H^2 + q^2\,x_B^2} = \sqrt{15,625^2 + 0,1^2\,12,5^2} = 15,675$ ton.

Contoh 3.2.B :

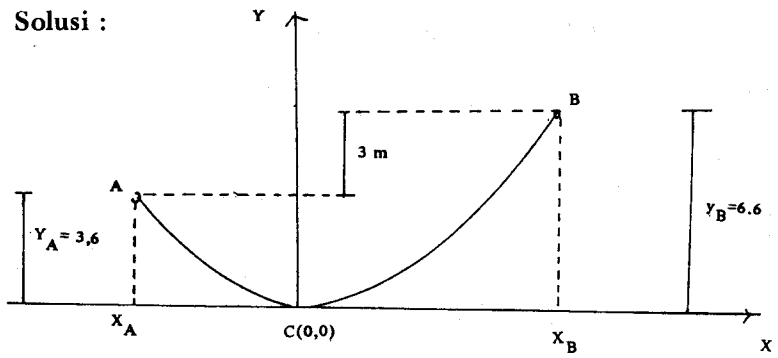


gambar 3.2.B.1

Kabel AB seperti terlihat dalam gambar 3.2.B.1, memikul suatu beban yang boleh dianggap terbagi rata sepanjang garis horisontal, q = 170 kg/m'. Bentang AB = 30 m dan titik B terletak 3 m lebih tinggi dari titik A. Tentukan :

a. Panjang kabel agar titik terendah C pada kabel terletak 3,6 m lebih rendah dari titik A.
b. Gaya tarik maksimum yang akan terjadi pada kabel yang panjangnya telah anda tentukan tersebut.

Solusi :



gambar 3.2.B.2

Titik C kita tentukan sebagai titik pangkal dalam sistem koordinat Cartesian yang kita gunakan (gambar 3.2.B.2). Dan kita tentukan dulu koordinat titik A dan B.

Persamaan lengkungan kabel menurut rumus (3.2.1) di muka adalah :

$$y = \frac{qx^2}{2H}$$

sehingga di titik A berlaku :

$$3{,}6 = \frac{170\, x_A^2}{2H}$$

atau

$$H = \frac{170\, x_A^2}{7{,}2} \qquad (3.2.B.1)$$

dan di titik B berlaku :

$$6{,}6 = \frac{170\, x_B^2}{2H}$$

atau

$$H = \frac{170\, x_B^2}{13{,}2} \qquad (3.2.B.2)$$

Dari persamaan (3.2.B.1) dan (3.2.B.2) kita peroleh :

$$11\, x_A^2 = 6\, x_B^2 \qquad (3.2.B.3)$$

Tapi, $x_B - x_A = 30$ atau $x_B = x_A + 30$ sehingga dari persamaan (3.2.B.3) dapat kita peroleh :

$$x_A = -12{,}74$$

$$x_B = 17{,}26$$

Kini H dapat ditentukan,

$$H = \frac{q\, x_B^2}{2\, y_B} = 3837 \text{ kg}$$

a. **Penentuan Panjang Kabel.**

Persamaan lengkungan kabel :

$$y = \frac{q\, x^2}{2H}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q\, x}{H}$$

ds = elemen kecil pada kabel

$$= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx$$

s = panjang kabel

$$= \int_{x_A}^{x_B} ds$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \frac{q^2 x^2}{H^2}}\, dx$$

Karena harga $\frac{q^2}{H^2}$ itu kecil sekali, maka dapat kita gunakan *cara pendekatan** sebagai berikut :

$\sqrt{1 + \frac{q^2 x^2}{H^2}}$ kita dekati dengan harga :

$1 + \frac{1}{2}\left(\frac{q^2 x^2}{H^2}\right)$

sehingga :

$$s = \int_{x_A}^{x_B} dx + \frac{1}{2} \int_{x_A}^{x_B} \frac{q^2 x^2}{H^2}\, dx$$

* lihat catatan halaman 197.

$$= 30 + \tfrac{1}{2} \int_{-12,74}^{17,26} \frac{170^2\, x^2}{3837^2}\, dx$$

$s = 32{,}40$ m

Secara eksak :

$$s_o = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \frac{q^2\, x^2}{H^2}}\, dx = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (k\,x)^2}\, dx ;$$

jika q/H kita nyatakan dengan k.

$kx = \operatorname{tg}\Theta$, $\qquad k\,dx = \sec^2\Theta\, d\Theta$

sehingga :

$$s_o = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\Theta}\, \frac{\sec^2\Theta\, d\Theta}{k}$$

$$= \frac{1}{k} \int_{x_A}^{x_B} \sec^3\Theta\, d\Theta.$$

Tapi :

$$\int \sec^3\Theta\, d\Theta = \int \sec\Theta\, \sec^2\Theta\, d\Theta$$

$$= \int \sec\Theta\, d(\operatorname{tg}\Theta)$$

$$= \sec\Theta \operatorname{tg}\Theta - \int \operatorname{tg}\Theta\, (\sec\Theta \operatorname{tg}\Theta\, d\Theta)$$

$$= \sec\Theta \operatorname{tg}\Theta - \int \sec\Theta\, (\sec^2\Theta - 1)\, d\Theta$$

$$2\int \sec^3\Theta\, d\Theta = \sec\Theta \operatorname{tg}\Theta + \int \sec\Theta\, d\Theta$$

$$\int \sec^3\Theta\, d\Theta = \tfrac{1}{2}(\sec\Theta \operatorname{tg}\Theta + \ln|\sec\Theta + \operatorname{tg}\Theta|)$$

Maka :

$$s_o = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (kx)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2k} \left[kx\sqrt{1 + (kx)^2} + \ln\left|\sqrt{1 + (kx)^2} + kx\right|\right]_{-12,74}^{17,26}$$

dengan :

$$k = \frac{q}{H} = \frac{170}{3837} = 0{,}0443 \qquad s_o = 32{,}25 \text{ m.}$$

b. Gaya Tarik Maksimum.

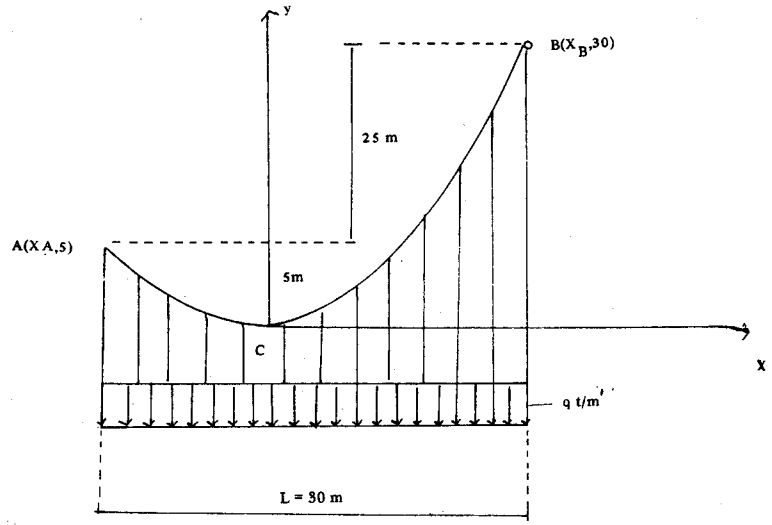
Gaya tarik maksimum terjadi di titik B, sebesar :

$$T_B = \sqrt{H^2 + q^2\, x_B^2} = 4830 \text{ kg.}$$

Catatan :

Dalam penentuan panjang kabel, simpangan akibat penyederhanaan $f(x) = \sqrt{1 + (kx)^2}$ menjadi $g(x) = 1 + (kx)^2/2$ adalah $s - s_o = 0{,}15$ m, jadi cukup seksama jika dibandingkan dengan panjang kabel yang dihitung tanpa pendekatan, yakni 32,25 m, hanya 0,47% kesalahannya.

Tetapi, hal semacam itu tidak selalu dapat kita harapkan. Lihatlah contoh seperti dalam gambar 3.2.B.3 berikut ini. Dalam contoh ini, hasil perhitungan panjang kabel dengan pendekatan tersebut adalah 60,10 m, sedangkan tanpa pendekatan 48,84 m, selisihnya 11,26 m atau 23,06%!



Gambar 3.2.B.3.

Nah, kenyataan di atas sangat perlu dan menarik untuk dibahas, karena kasus semacam itu akan sering kita jumpai. Pertama kita kupas arti pendekatan tersebut, kemudian tentu saja kita coba untuk mengukur simpangan akibat penyederhanaan tersebut, begini :

Baik $f(x) = \sqrt{1 + (kx)^2}$ maupun $g(x) = 1 + (kx)^2/2$ merupakan fungsi yang positif, nilainya positif untuk setiap x, dan selalu berlaku hubungan $g(x) \geq f(x)$ karena :

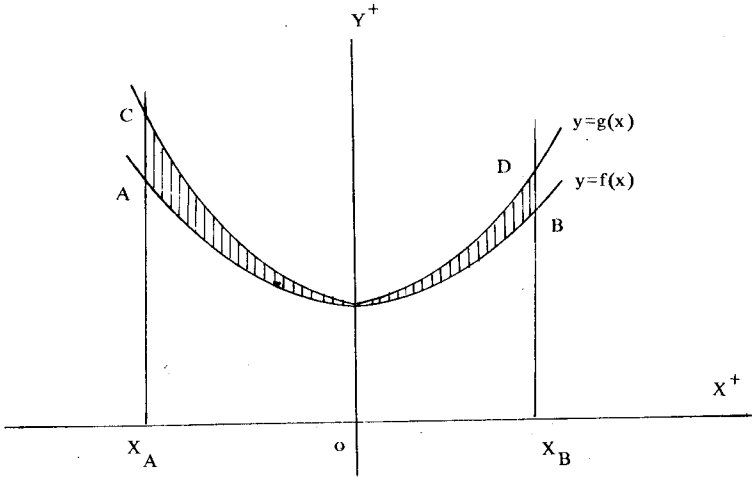
$$(1 + \frac{(kx)^2}{2})^2 - (\sqrt{1 + (kx)^2})^2 = \frac{(kx)^4}{4}$$

atau

$$[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = \frac{(kx)^4}{4}$$

$$g(x) - f(x) = \frac{(kx)^4}{4[g(x) + f(x)]} \qquad (3.2.B.4)$$

Jelaslah bahwa. ruas kanan persamaan (3.2.B.4) selalu positif kecuali untuk x = 0, dan kalau kita gambarkan sketsanya adalah seperti gambar 3.2.B.4 berikut ini :



gambar 3.2.B.4

Pendekatan f(x) dengan g(x) akan mengakibatkan timbulnya simpangan sebesar :

$$\Delta s = \int_{x_A}^{x_B} g(x)dx - \int_{x_A}^{x_B} f(x)\,dx$$

dan dari persamaan (3.2.B.4) dapat kita tentukan bahwa

$$\Delta s = \int_{x_A}^{x_B} \frac{(kx)^4}{4(1 + \frac{(kx)^2}{2} + \sqrt{1 + (kx)^2})}dx \qquad (3.2.B.5)$$

Kita tidak akan menghitung kelebihan panjang kabel atau Δ s secara tepat dari (3.2.B.5), tentu ! Tetapi, marilah kita reka simpangan tersebut yang tiada lain adalah luas bidang arsiran ABDC dalam gambar 3.2.B.4, caranya sebagai berikut :

Lihatlah persamaan (3.2.B.5), yang bikin kita sulit dalam pengintegralannya adalah faktor pembagi dalam integrand, oleh karena itu perlu disederhanakan, antara lain dengan mengingat bahwa $[1 + (kx)^2/2 + \sqrt{1 + (kx)^2}] \geq 2$, berapapun harga x, sehingga kita dapatkan pertidaksamaan berikut :

$$\Delta s \leq \int_{x_A}^{x_B} \frac{(kx)^4\,dx}{8} = \frac{k^4}{40}(x_B^5 - x_A^5) \qquad (3.2.B.6)$$

Ruas terkanan pada pertidaksamaan (3.2.B.6) adalah "katup pengaman" kita, artinya simpangan yang terjadi dalam pendekatan tersebut tidak akan melampaui faktor :

$$M = \frac{k^4}{40}(x_B^5 - x_A^5) \qquad (3.2.B.7)$$

Tentu saja dalam penentuan batas atas simpangan mesti kita pilih batas atas yang sekecil mungkin, supaya taksiran kita cukup cermat, dan dalam contoh kita ini harga M akan

cukup "kecil" karena bilangan k^4 umumnya kecil sekali (ingat k = q/H dan H umumnya jauh lebih besar daripada q).

Dalam contoh kita, harga q/H = (170)/(3837) = 0,0443, dan x_B = 17,26 serta x_A = – 12,74, sehingga dengan (3.2.B.7) kita hitung M = 0,1799 m, dan bolehlah kita merasa lega karena hal itu berarti: sebesar-besarnya simpangan yang terjadi akibat pendekatan yang kita lakukan, tidak akan lebih dari 0,18 m!Dan memang, sudah kita hitung bahwa $\Delta s = 0{,}15 \text{ m} < 0{,}18 \text{ m}$.

Tetapi dalam contoh seperti pada gambar (3.2.B.3), kita dapatkan M = 33,91 m, jadi besar sekali ! Dan ini mencurigakan, artinya tidak ada jaminan bahwa pendekatan yang kita lakukan akan cukup seksama, sangat *boleh jadi* simpangannya cukup besar, jadi hati-hatilah. Sebaliknya jika harga M kecil, bolehlah kita dengan aman menggunakan pendekatan tersebut, sebab simpangannya tidak akan melampaui harga M, yang kecil tentu saja.

Sampai di sini masalah perhitungan panjang kabel parabolik boleh dikatakan selesai; baik dengan cara langsung maupun dengan cara pendekatan beserta rekaan kesalahannya. Tetapi hal itu khusus sifatnya, masih ada pertanyaan misalnya, bagaimana kita bisa sampai ke sana dan bagaimana pula apabila fungsi lain yang harus kita hadapi, karena manipulasi aljabrik seperti pada persamaan (3.2.B.4) tidak selalu bisa dilakukan ?

Secara umum, bekerja dengan fungsi berbentuk polinomial memang lebih menyenangkan, karena perhitungan nilai fungsi, pengintegralan dan penurunannya akan lebih mudah. Oleh karena itu peranan Deret Taylor sangat penting, banyak fungsi yang bisa didekati dengan deret berbentuk polinomial tersebut. Baiklah kita kutip teorema "Rumus Taylor dengan Suku Sisa" sebagai berikut :

Jika f dan turunannya sampai dengan ke (n + 1) terdefinisi dan kontinu pada suatu interval yang mengandung

a, maka untuk setiap x dalam interval tersebut berlaku Rumus Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + E_n(x)$$

dengan

$$E_n(x) = \frac{f^{n+1}(u)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad a<u<x$$

Jika a = 0, kita namakan deret tersebut deret Maclaurin, Suku sisa yang kita gunakan di sini dikenal dengan nama suku sisa Lagrange, artinya masih ada bentuk suku sisa yang lain.

Nah, dalam contoh kita $f(x) = \sqrt{1 + (kx)^2}$, dan deret Maclaurinnya untuk n = 3 adalah :

$$f(x) = 1 + 0 + \frac{(kx)^2}{2} + 0 + E_3(x) \qquad (3.2.B.8)$$

dengan :

$$E_3(x) = \frac{-k^4\,(1 - 4k^2u^2)(x)^4}{8(1 + k^2u^2)^{7/2}}, \quad O<u<x \qquad (3.2.B.9)$$

Tidak sukar menemukan beberapa kesamaan antara (3.2.B.8) dengan (3.2.B.4) bukan ? Dan jika kembali kita namakan

$$(1 + \frac{(kx)^2}{2}) = g(x)$$

maka (3.2.B.8) dapat kita tulis sebagai :

$$\frac{(1-4k^2u^2)(kx)^4}{8(1+k^2u^2)^{7/2}} = g(x) - f(x), \quad O<u<x \qquad (3.2.B.10)$$

Alhasil kita peroleh :

$$\left| \int_o^{x_B} (g(x) - f(x))dx \right| = \left| \int_o^{x_B} \frac{(1-4k^2u^2)(kx)^4\,dx}{8(1+k^2u^2)^{7/2}} \right|$$

$$0 < u < x \qquad (3.2.B.11)$$

Dan untuk $x < 0$, tentulah :

$$\left| \int_{x_A}^{o} (g(x) - f(x))dx \right| = \left| \int_{x_A}^{o} \frac{(1 - 4k^2v^2)(kx)^4 \, dx}{8(1 + k^2v^2)^{7/2}} \right|$$

$$x < v \leq 0 \qquad (3.2.B.12)$$

Perhatikan persamaan (3.2.B.11) dan (3.2.B.12), faktor $\frac{(kx)^4}{8}$ tidak berpengaruh terhadap kemutlakan harga integral tentu di ruas kanannya, karena sifatnya yang tidak negatif. Dan

$\left| \frac{(1 - 4k^2u^2)}{(1 + k^2u^2)^{7/2}} \right| \leq 1$, berapa pun harga u, sehingga

$$\left| \int_{o}^{x_B} \frac{(1 - 4k^2u^2)(kx)^2 \cdot dx}{8(1+ku)^{7/2}} \right| \leq \int_{o}^{x_B} \frac{(kx)^4}{8} dx$$

Tentu saja hal yang serupa juga berlaku bagi (3.2.B.12), alhasil dengan menjumlahkan (3.2.B.11) dan (3.2.B.12) kita peroleh :

$$\left| \int_{o}^{x_B} (g(x) - f(x))dx \right| + \left| \int_{x_A}^{o} (g(x) - f(x))dx \right| \leq$$

$$\int_{o}^{x_B} \frac{(kx)^4 \, dx}{8} + \int_{x_A}^{o} \frac{(kx)^4}{8} dx \qquad (3.2.B.13)$$

Mengingat bahwa $|A + B| \leq |A| + |B|$, **untuk setiap** harga A dan B, serta

$$\int_{a}^{c} h(x) \, dx + \int_{c}^{b} h(x) \, dx = \int_{a}^{b} h(x)dx, \quad \textbf{maka} \quad (3.2.B.13)$$

menjadi :

$$\int_{x_A}^{x_B} (g(x) - f(x)) \, dx = \int_{x_A}^{x_B} g(x)dx - \int_{x_A}^{x_B} f(x)dx \leq \int_{x_A}^{x_B} \frac{(kx)^4}{8} dx$$

dan hasilnya sesuai dengan hasil sebelumnya, pertidaksamaan (3.2.B.6).

Harap dicatat juga bahwa uraian fungsi f(x) tidak perlu berhenti hanya sampai suku ke n = 3 saja seperti pada (3.2.B.8), semakin besar harga n kita ambil semakin telitilah pendekatan kita, walaupun tidak selalu dibutuhkan.

3.2.SL. SOAL LATIHAN

1. Kabel AB memikul beban terbagi rata sepanjang garis horisontal, q = 5 ton/m'. A dan B sama tingginya, panjang bentang AB = 1000 m. Jarak titik terendah pada kabel ke tali-busur AB, y = 95 m. Berat kabel diabaikan. Tentukanlah :
   a. Panjang kabel AB.
   b. Gaya-dalam terbesar dan terkecil yang terjadi pada kabel.

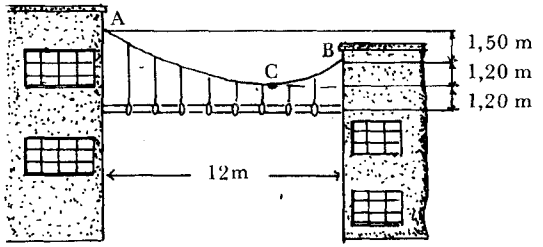
2. Kabel AB memikul beban terbagi rata sepanjang garis horisontal, q = 0,3 kg/m'. A dan B sama tingginya, panjang bentang AB = 30 m. Tentukanlah panjang kabel terkecil yang boleh digunakan, jika gaya dalam terbesar yang diijinkan terjadi pada kabel adalah T = 40 kg. Abaikanlah berat kabel.

3. Berapakah jarak titik terendah pada kabel parabolik AB ke tali-busur AB, jika panjang bentang AB adalah 3000 cm dan panjang kabel yang digunakan adalah 3060 cm ?

4. Sebuah pipa uap, beratnya 65 kg/m', bertumpu pada suatu "sistem-kabel" seperti terlihat dalam gambar A. Berat kabel, g = 8 kg/m'.
   Andaikanlah berat kabel dan berat pipa uap sebagai beban terbagi rata sepanjang garis horisontal yang be-

kerja pada struktur kabel, dan tentukanlah :

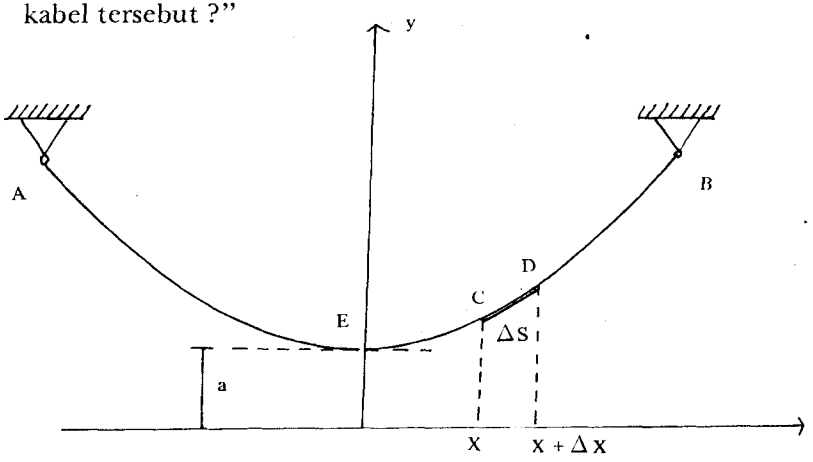
a. Kedudukan relatif C, titik terendah pada kabel
b. Gaya-dalam terbesar yang terjadi pada kabel
c. Panjang kabel.



Gambar A

3.3. Catenary (rantai, catena = chain – Latin).

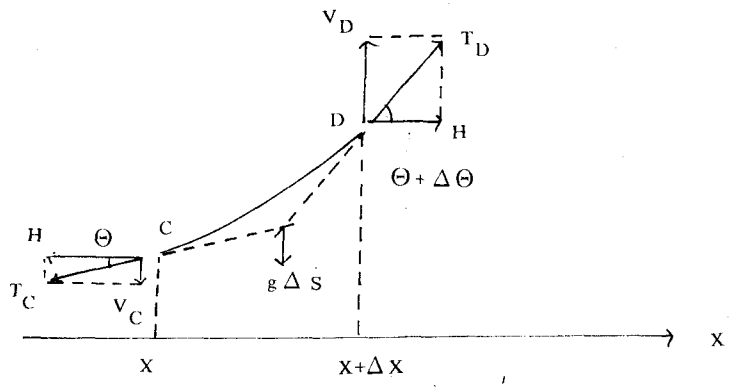
Bagian ini dapat diawali dengan menjawab pertanyaan : "Apabila sebuah kabel homogen (dengan berat kabel per satuan panjang = g) yang panjangnya diketahui, misalkan L satuan panjang, kita gantung di ujung-ujungnya (A dan B), akan bagaimanakah jadinya bentuk lengkungan kabel tersebut ?"



gambar 3.3.1 Δx

Lihat gambar 3.3.1. Titik terendah E pada kabel kita tentukan sebagi titik (0,a) dalam sistem koordinat Cartesian yang akan kita gunakan untuk menyatakan fungsi lengkungan kabel.

Pandanglah sekarang, bagian kecil CD sepanjang Δs pada kabel; dan "pisahkan"lah bagian CD ini sebagai suatu raga-lepas (gambar 3.3.2). Di titik C bekerja gaya tarik T_C yang berimpit dengan garis singgung lengkungan kabel di C; dan di D bekerja gaya tarik T_D yang berimpit dengan garis singgung lengkungan kabel di D.



gambar 3.3.2

Dari kesetimbangan raga-lepas CD – jumlah gaya vertikal sama dengan nol – kita peroleh :

$$V_D = g\,\Delta s + V_C \qquad (3.3.1)$$

dengan : $V_C = H \operatorname{tg} \Theta$ dan $V_D = H \operatorname{tg} (\Theta + \Delta\Theta)$.

Masukkan harga V_C dan V_D ke dalam persamaan (3.3.1), kita peroleh :

$$g\,\Delta s - H\,(\operatorname{tg} (\Theta + \Delta\Theta) - \operatorname{tg} \Theta) = 0 \qquad (3.3.2)$$

Sedangkan :

$\operatorname{tg} \Theta$ = koefisien arah garis singgung di C, = f'(x) dan
$\operatorname{tg} (\Theta + \Delta\Theta)$ = koefisien arah garis singgung di D, = f'(x+Δx);

sehingga persamaan (3.3.2) dapat kita tulis sebagai :

$$g\Delta s = H(f'(x + \Delta x) - f'(x)) \qquad (3.3.3)$$

Kemudian bagilah (3.3.3) dengan $\Delta x H$ dan ambil limitnya untuk $\Delta x \to 0$, kita dapatkan :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g}{H} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

atau :

$$\frac{g}{H} \frac{ds}{dx} = f''(x) \qquad (3.3.4)$$

Dari kalkulus kita tahu bahwa :

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \qquad (3.3.5)$$

Masukkan (3.3.5) ke dalam (3.3.4) dan nyatakan $f''(x)$ dengan $\frac{d^2y}{dx^2}$, kita peroleh :

$$\frac{g}{H}\sqrt{1 + (dy/dx)^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \qquad (3.3.6)$$

Sebutlah $\frac{g}{H} = \frac{1}{a}$, maka persamaan diferensial (3.3.6) akan dipenuhi oleh :

$$y = a \cos h \frac{x}{a} + C \qquad (3.3.7)$$

$$\text{sebab } \frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{a} \qquad (3.3.8)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a} \qquad (3.3.9)$$

$$\text{dan } \frac{g}{H} \sqrt{1 + (dy/dx)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1+(\sinh \frac{x}{a})^2}$$

$$= \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a}$$

Dengan demikian telah kita temukan bahwa persamaan lengkungan kabel adalah :

$$y = a \cosh \frac{x}{a} + C$$

Dan jika $x = 0$, $y = a$ (begitulah syarat yang kita pilih) sehingga : $a = a \cosh 0 + C$ atau $C = 0$

Alhasil, kita dapatkan :

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \qquad (3.3.10)$$

Panjang kabel, L, dapat ditentukan sebagai berikut : Turunkan (3.3.10) terhadap x,

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{a}$$

$$ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx$$

$$s = \int ds = \int \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx$$

$$s = a \sinh \frac{x}{a} + C \qquad (3.3.11)$$

Untuk $x = 0$, tentulah $s = 0$ (lihat gambar 3.3.1).
Jadi, $0 = a \sinh 0 + C$ atau $C = 0$

Alhasil, kita peroleh panjang kabel dari E (0,a) ke C(x,y):

$$s = a \sinh \frac{x}{a} \qquad (3.3.12)$$

Jika absis A = x_A dan absis B = x_B, maka panjang kabel seluruhnya adalah :

$$L = a \sinh \frac{x_B}{a} - a \sinh \frac{x_A}{a} \qquad (3.3.13)$$

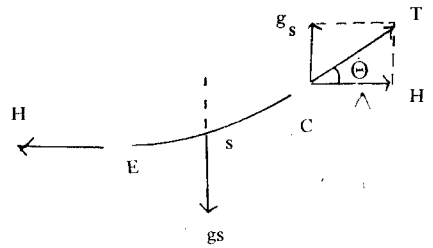
dengan $x_B > 0$ dan $x_A < 0$.

Kalau kita kuadratkan (3.3.10) dan (3.3.12), lalu kita kurangkan, akan kita peroleh :

$$y^2 - s^2 = a^2 \qquad (3.3.14)$$

Perhatikan bahwa rumus-rumus penting di atas mengandung parameter a, dengan a = H/g, yang besarnya seringkali harus ditentukan dengan cara coba-coba.

Sekarang, mari kita tinjau bagian kabel EC (gambar 3.3.3), dengan C sebagai titik sembarang pada kabel dan E sebagai titik terendah pada kabel :



gambar 3.3.3

s = panjang kabel bagian EC
T = gaya tarik kabel di titik sembarang C
H = gaya tarik kabel di titik terendah E, yang sama besar dengan uraian horisontal T
gs = berat kabel bagian EC, yang sama besar dengan uraian vertikal T.

Jadi T dapat dinyatakan sebagai resultan gaya-gaya H dan gs, atau

$$T = \sqrt{H^2 + g^2 s^2}$$

Sedangkan di muka telah kita tentukan bahwa a = H/g atau H = g a sehingga :

$$T = g\sqrt{a^2 + s^2}$$

Tapi, $a^2 + s^2 = y^2$ menurut persamaan (3.3.14) di atas, sehingga :

$$T = g\,y \qquad (3.3.15)$$

dengan :

T = gaya tarik kabel di titik sembarang C
g = berat kabel per satuan panjang
y = ordinat titik sembarang C

Dari kesetimbangan gaya-gaya horisontal pada ragalepas EC ini kita dapatkan :

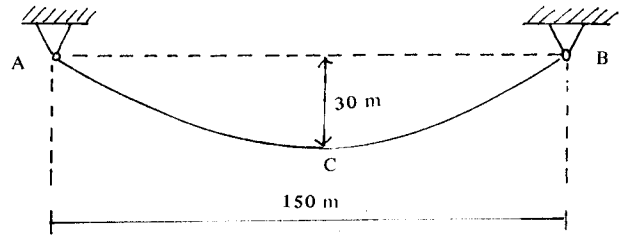
$$T \cos \Theta = H \qquad (3.3.16)$$

dengan:

T = gaya tarik kabel di titik sembarang C pada kabel
Θ = sudut antara garis singgung lengkungan kabel di C dengan garis horisontal
H = gaya tarik kabel di titik terendah E

Nah sekarang, dapatkah anda menangkap arti persamaan (3.3.16) tersebut ?

Contoh 3.3.A :



gambar 3.3.A.1

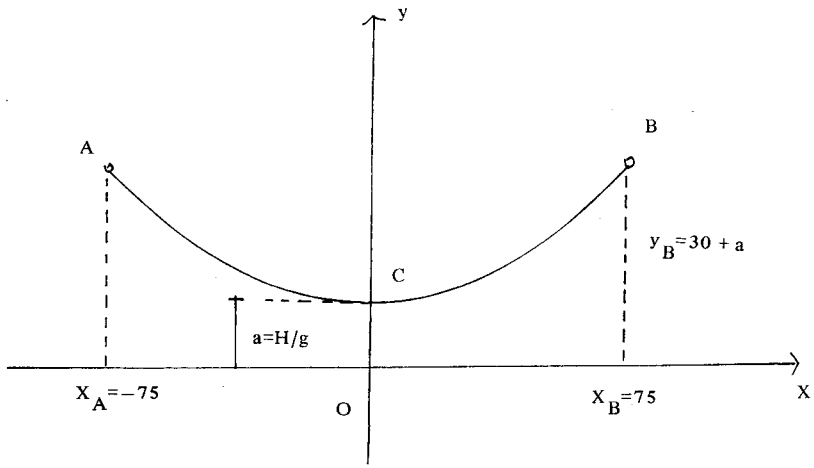
Struktur kabel seperti terlihat dalam gambar 3.3.A.1, menanggung beratnya sendiri sebesar g = 5 kg/m'.

Tentukan :

a. Gaya tarik kabel maksimum dan minimum.

b. Panjang kabel.

Solusi :



gambar 3.3.A.2

Titik terendah C pada kabel kita tentukan sebagai titik (0,a) dalam sistem koordinat Cartesian yang kita gunakan, dengan :

$a = \frac{H}{g}$ (gambar 3.3.A.2) dan H = gaya tarik kabel di C.

Persamaan lengkungan kabel :

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \qquad (3.3.10)$$

Maka di titik B berlaku :

$$30 + a = a \cosh \frac{75}{a} \text{ atau}$$

$$\frac{30}{a} + 1 = \cosh \frac{75}{a}$$

Dengan cara coba-coba kita tentukan harga a.

a	$\frac{75}{a}$	$\frac{30}{a}$	$\frac{30}{a}+1$	$\cosh\frac{75}{a}$
30	2,5	1,00	2,00	6,132
90	0,833	0,333	1,333	1,367
100	0,750	0,300	1,300	1,295
95	0,789	0,316	1,316	1,328
98	0,765	0,306	1,306	1,307

Dengan mengambil a = 98, kita peroleh :

$y_B = 30 + 98 = 128$ m.

a. Gaya tarik maksimum dan minimum.

Gaya tarik minimum terjadi di suatu titik dengan Θ terkecil, yaitu di titik terendah C, $\Theta = 0$.

$T_{minimum} = T_C = H = g\,a = 5(98) = 490$ kg

Gaya tarik maksimum terjadi di suatu titik dengan Θ terbesar, yaitu di titik A dan titik B sebesar

$T_{maksimum} = T_A = T_B = g\,y_b = 5\,(128) = 640$ kg.

b. Panjang Kabel.

$y^2 - s^2 = a^2$ atau $s^2 = y^2 - a^2$ (3.3.14)

dengan :

y = ordinat titik (x,y)

s = panjang kabel dari titik (0,a) ke (x,y)

Maka jika kita ambil $y = y_B$, akan diperoleh :

$S_{C\,B}$ = panjang kabel dari C (0,a) ke B (x_B, y_B)

$= \sqrt{y_B^2 - a^2}$

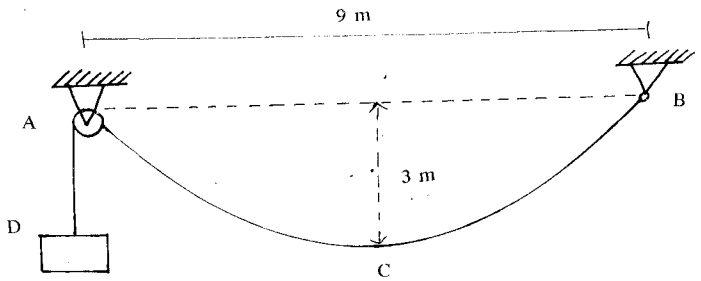
$= \sqrt{128^2 - 98^2}$

$= 82{,}34$ m

Proyek Pembinaan Perpustakaan
Jawa Timur
T. A. 1993 / 1994

Maka panjang AB = $2 S_{CB}$ = 2(82,34) = 164,68 m.

Contoh 3.3.B :

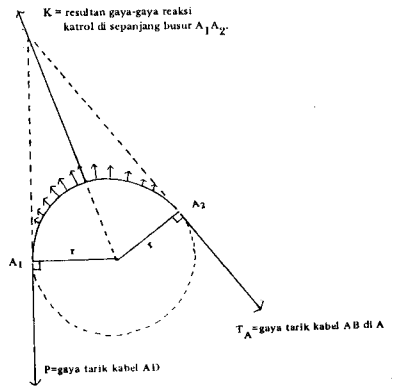


gambar 3.3.B.1

Beban pengimbang P = 200 kg tergantung pada ujung D sebuah kabel yang melalui katrol licin seperti terlihat dalam gambar 3.3.B.1. Ujung kabel B digantungkan pada sebuah sendi. Tentukanlah, dengan mengabaikan berat kabel bagian AD :

a. Panjang kabel AB
b. Berat kabel per satuan panjang, agar sistem dalam keadaan setimbang.

Solusi :



gambar 3.3.B.2

Kita tinjau dulu kesetimbangan gaya pada raga-lepas kabel bagian $A_1 A_2$ yang bersentuhan dengan katrol (gambar 3.3.B.2).

Gaya-gaya yang bekerja pada raga-lepas ini adalah :

1. Gaya tarik kabel AD di A_1, sebesar P = 200 kg
2. Gaya tarik kabel AB di A_2 yang dinyatakan dengan T_A.
3. Gaya-gaya reaksi katrol di sepanjang permukaannya yang bersentuhan dengan kabel (busur $A_1 A_2$); gaya-gaya reaksi ini bekerja sebagai gaya-gaya normal di sepanjang busur $A_1 A_2$ tersebut, karena katrol dianggap licin (tidak ada gesekan antara kabel dan permukaan katrol). Resultan gaya-gaya reaksi permukaan katrol ini adalah gaya K yang melalui titik O (pusat lingkaran katrol) dan membentuk kesetimbangan dengan P dan T_A tentunya.

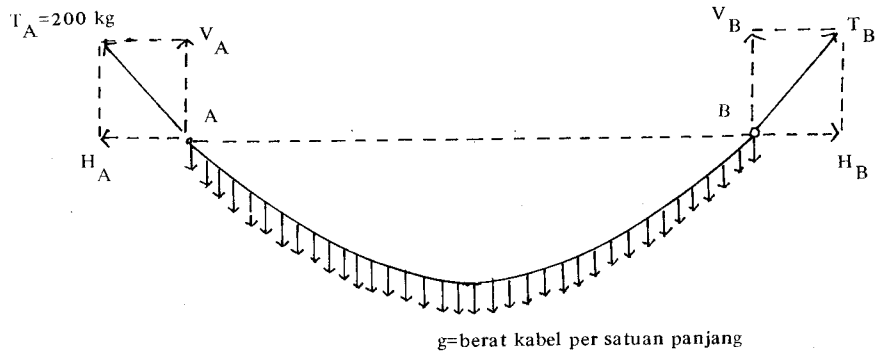
Dengan mengambil jumlah momen terhadap titik O yang sama dengan nol, kita peroleh :

$$T_A r = Pr$$

atau

$$T_A = P = 200 \text{ kg}.$$

Sekarang, mari kita tinjau raga-lepas AB (gambar 3.3.B.3)



gambar 3.3.B.3

Gaya-gaya yang bekerja pada raga-lepas ini adalah :

1. Gaya tarik kabel di A (= T_A)
2. Berat kabel, g per satuan panjang.
3. Reaksi tumpuan di B (= T_B), yang sama besar dengan gaya tarik kabel di B.

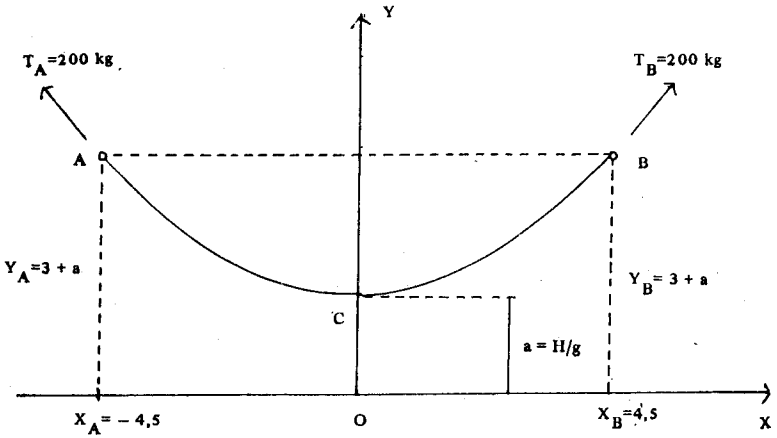
Dari jumlah gaya horisontal yang sama dengan nol, kita peroleh :

$$H_A = H_B = H$$

(H_A dan H_B masing-masing adalah uraian horisontal gaya T_A dan T_B).

Sedangkan dari kesetimbangan gaya-gaya vertikal, kita dapatkan bahwa V_A (uraian vertikal T_A) sama dengan V_B (uraian vertikal T_B). Sehingga dapat kita simpulkan bahwa besar $T_B = T_A = 200$ kg.

Maka yang kita hadapi sekarang adalah persoalan catenary atau kabel yang menanggung beratnya sendiri, dengan T_A dan T_B sebagai reaksi-reaksi tumpuannya (gambar 3.3.B.4).



gambar 3.3.B.4

Titik terendah C pada kabel kita tentukan sebagai titik (0,a) dalam sistem koordinat Cartesian yang kita gunakan, dengan :

$$a = \frac{H}{g}.$$

Maka : $x_A = -4{,}5$ m, $x_B = 4{,}5$ m dan $y_A = y_B = 3 + a$

Telah diuraikan di muka, bahwa persamaan lengkungan kabel dalam sistem koordinat Cartesian tersebut adalah :

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \qquad (3.3.10)$$

sehingga di titik B, berlaku :

$$3 + a = a \cosh \frac{4{,}5}{a}$$

atau

$$\frac{3}{a} + 1 = \cos h \frac{4{,}5}{a}$$

Dengan cara coba-coba kita tentukan harga a.

a	$\frac{4{,}5}{a}$	$\frac{3}{a}$	$\frac{3}{a}+1$	$\cosh\frac{4{,}5}{a}$
3	1,500	1,000	2,000	2,352
4	1,125	0,750	1,750	1,702
3,60	1,250	0,833	1,833	1,888
3,80	1,184	0,789	1,789	1,788

Dengan mengambil a = 3,80, kita dapatkan :

$y_A = y_B = 6{,}80$ m.

a. **Panjang kabel AB**

$$s^2 = y^2 - a^2 \qquad (3.3.14)$$

dengan :

s = panjang kabel dari titik C (0,a) ke titik (x,y)

Maka :

$s_{CB} = \sqrt{y_B^2 - a^2} = \sqrt{6{,}8^2 - 3{,}8^2} = 5{,}64$ m

$s_{CA} = \sqrt{y_A^2 - a^2} = \sqrt{6{,}8^2 - 3{,}8^2} = 5{,}64$ m

sehingga

$s_{AB} = s_{CA} + s_{CB} = 11{,}28$ m

b. **Berat kabel per satuan panjang.**

$$T = g\,y \qquad (3.3.15)$$

sehingga di titik A berlaku :

$T_A = g\,y_A \rightarrow 200 = g(6{,}80)$

g = 29,41 kg/m' kabel.

Catatan :

Dengan semakin banyaknya kalkulator yang dapat diprogram, cara-cara numerik akan lebih "kena" untuk menyelesaikan soal pencarian parameter a jika dibandingkan dengan cara coba-coba seperti yang digunakan dalam buku ini. Tetapi, baik cara Bisection, Newton, Regula Falsi, Secant maupun Iterasi Titik Tetap memerlukan penjelasan yang panjang dan, jauh dari berhubungan bila dipakai dan dibahas dalam buku ini.

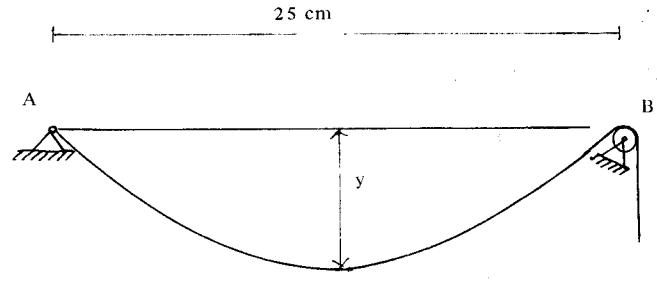
3.3. SL SOAL LATIHAN

1. Kabel AB, panjangnya 180 m, beratnya 5 kg/m', digantungkan pada kedua ujungnya. A dan B sama tinggi-nya, dan jarak titik terendah pada kabel ke tali busur AB adalah y = 45 m. Tentukanlah panjang bentang AB dan gaya-dalam kabel terbesar.

2. Kabel homogen AB, panjangnya 30 m, digantungkan pada kedua ujungnya. Kedua ujung kabel, A dan B, sama tingginya. Titik C adalah titik terendah pada kabel dan terletak pada jarak 6 m dari tali-busur AB. Gaya-dalam kabel terbesar adalah T = 25 kg. Tentukanlah jarak antara A dan B, dan tentukan pula berat kabel.

3. Sebuah kabel homogen, panjangnya 45 m, digantung pada ujung-ujungnya. Kedua ujung kabel sama tinggi-nya, dan jarak antara kedua ujung kabel tersebut adalah 30 m. Tentukanlah kedudukan relatif titik terendah pada kabel dan berat kabel jika gaya-dalam kabel terbesar adalah T = 15 kg.

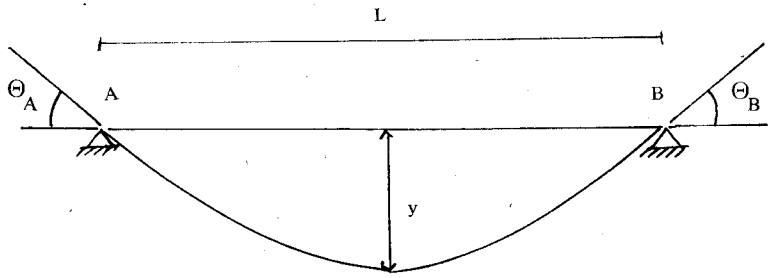
4 Sebuah kabel homogen, panjangnya 150 cm, melalui sebuah katrol licin B dan salah satu ujungnya digantung pada sendi A (gambar A). Tentukanlah jarak titik terendah pada kabel ke tali-busur AB, y, agar kabel dalam keadaan setimbang.



Gambar A

5. Kabel homogen AB, beratnya g per satuan panjang, digantung pada kedua ujungnya (gambar B). A dan B sama tingginya, jarak AB = L. Jarak titik terendah pada kabel ke tali-busur AB adalah y. Kelandaian kabel di B = Θ_B Tentukanlah angka-perbandingan antara y

dan L agar dihasilkan gaya-dalam kabel maksimum, T_{maks}, yang sekecil-kecilnya dan tentukan pula hubungan antara Θ_B dan T_{maks}.

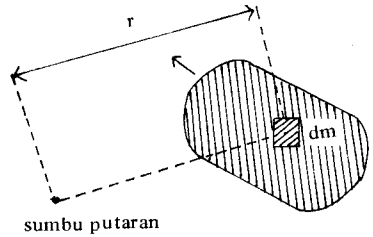


Gambar B

6. Sebuah kabel yang beratnya 2 kg/m' digantung pada ujung-ujung A dan B. Titik A 500 meter lebih tinggi daripada titik B. Proyeksi-proyeksi titik A dan titik B pada bidang horisontal berjarak 1500 m. Tentukanlah tegangan maksimum kabel dan panjangnya.

BAB IV
MOMEN INERSIA

Bagi mahasiswa yang pernah belajar Mekanika, konsep momen inersia dalam Mekanika bukanlah barang asing, tentu. Kita ingat bahwa besaran momen inersia muncul ketika kita mempelajari gerakan berputar suatu benda pejal akibat suatu momen, dan momen inersia I didefinisikan sebagai berikut :



gambar 4.1

$$I = \int_M r^2 \, dm$$

dengan :

dm = masa elemen benda

r = jarak dm ke sumbu putaran

M = masa benda total

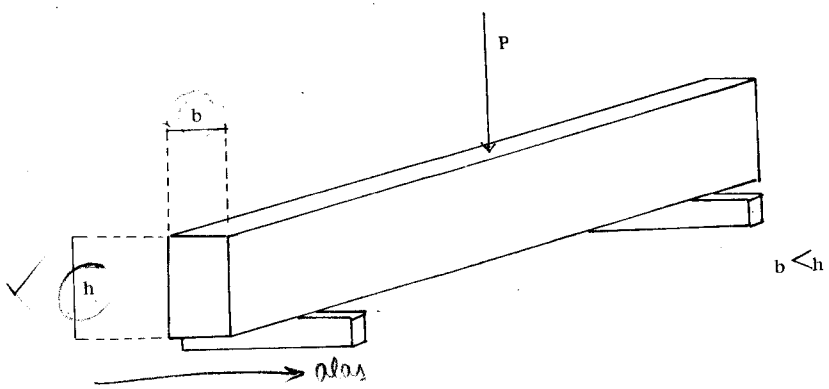
Akan halnya momen inersia dalam teknik sipil, walaupun nama yang digunakan sama tetapi munculnya konsep dan arti fisisnya sama sekali berbeda. Dalam teknik sipil, momen inersia merupakan suatu ukuran kekakuan bagian bangunan dalam menahan tegangan yang timbul pada penampangnya, akibat suatu gaya, momen gaya atau strain. Hal ini akan jelas ketika kita bahas masalah tegangan pada bab yang bersangkutan.

Istilah yang lebih "kena" untuk apa yang selama ini disebut momen inersia dalam teknik sipil adalah Momen-Kedua (second moment), dan cukup banyak buku-buku yang memakai istilah tersebut; hal ini akan jelas dari definisinya kelak. Tetapi istilah momen inersia akan tetap dipakai dalam buku ini karena alasan kebiasaan.

Salah satu arti penting momen inersia suatu penampang akan diantarkan secara sederhana melalui contoh berikut :

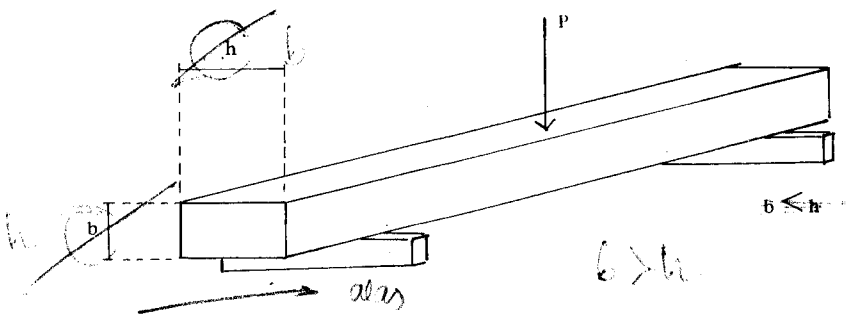
Sebuah balok prismatik yang penampangnya berukuran bxh kita letakkan pada tumpuan menurut dua cara sebagai berikut :

Cara I :



gambar 4.2.a

Cara II :



gambar 4.2.b

Selanjutnya balok yang diletakkan menurut cara I kita sebut balok I, dan yang menurut cara II kita sebut balok II.

Dari pengalaman kita sehari-hari kita tahu bahwa, walaupun baloknya sama, balok I tentu "lebih kuat" untuk memikul beban P ketimbang balok II karena :

1. Balok II akan melendut lebih jauh ke bawah daripada balok I, walaupun beban P yang dipikulnya sama besar.
2. Apabila beban P diperbesar, balok II akan patah lebih dulu daripada balok I.

Gejala ini dapat "dijelaskan" sebagai berikut :

i. Akan kita tunjukkan kelak dalam bab yang bersangkutan bahwa, besar lendutan suatu balok berbanding terbalik dengan EI, faktor kekakuan terhadap momen lentur. E adalah modulus keelastisan balok yang bergantung pada sifat bahannya (dalam contoh di atas kedua balok punya E yang sama). Sedangkan I adalah momen inersia penampang balok terhadap garis netralnya, yang sangat dipengaruhi oleh kedudukan balok tersebut terhadap beban yang dipikulnya. Kelak akan kita lihat bahwa I pada balok I adalah

$$I_1 = \frac{bh^3}{12},$$ sedangkan I balok II adalah

$$I_2 = \frac{b^3 h}{12},$$ karena $b < h$ tentu saja $I_1 > I_2$,

sehingga lendutan balok II lebih besar daripada balok I.

ii. Patahnya balok akibat pembebanan tersebut di atas diakibatkan oleh tegangan yang terjadi pada penampangnya, yang telah melampaui batas kekokohannya. Tegangan yang mematahkan balok tersebut bisa diakibatkan oleh gaya lintang atau oleh momen lentur yang kelewat besar, tetapi keduanya berbanding terbalik dengan momen inersianya, sehingga semakin besar momen inersianya semakin kokohlah balok tersebut.

Dari contoh di atas terlihatlah bahwa momen inersia dalam bangunan teknik sipil sangat penting artinya. Sebenarnya masih banyak gejala kekokohan lain yang juga dipengaruhi oleh momen inersia suatu penampang, namun demikian, sebagai pengantar uraian selanjutnya contoh di atas kiranya cukup memberi gambaran tentang pentingnya momen inersia suatu penampang.

4.1. Definisi :

Sebelum kita sampai pada definisi momen inersia di bawah ini, harap dicatat bahwa momen inersia dalam teknik sipil ada dua jenis :

1. Momen inersia penampang terhadap suatu garis lurus.
2. Momen inersia penampang terhadap suatu titik.

Namun untuk pemudahan pembahasan, akan kita buat suatu sistem koordinat Cartesian sebagai acuan, dan momen inersia terhadap suatu garis kita bagi dua jenis, satu terhadap garis vertikal yang kita jadikan sumbu Y, dan satunya lagi terhadap garis horisontal yang kita jadikan sumbu X. Lebih lanjut kita definisikan juga momen sentrifugal yang erat kaitannya dengan momen inersia.

Definisi 4.1.1 : Momen inersia penampang A terhadap sumbu X,

$$I_x = \int_A y^2 \, dA \qquad (4.1.1)$$

Definisi 4.1.2 : Momen inersia penampang A terhadap sumbu Y,

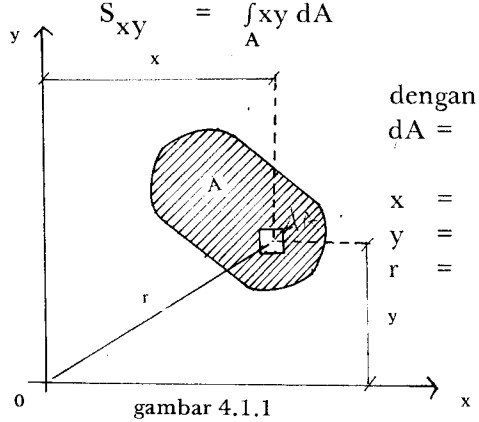
$$I_y = \int_A x^2 \, dA \qquad (4.1.2)$$

Definisi 4.1.3 : Momen inersia penampang A terhadap titik pangkal 0,

$$I_p = \int_A r^2 \, dA \qquad (4.1.3)$$

Definisi 4.1.4 : Momen sentrifugal penampang A terhadap sumbu X dan Y,

$$S_{xy} = \int_A xy \, dA \qquad (4.1.4)$$

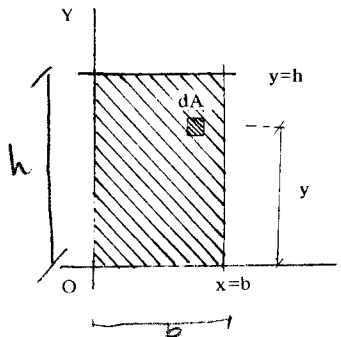


gambar 4.1.1

dengan :
dA = elemen luas penampang A
x = jarak dA ke sumbu Y
y = jarak dA ke sumbu X
r = jarak dA ke titik pangkal 0.

Arti integral pada definisi-definisi di atas secara umum haruslah ditafsirkan sebagai integral lipat-dua, dengan A sebagai daerah integrasinya (gambar 4.1.1). Apabila bentuk penampang A bersifat "teratur", integral lipat-dua tersebut dapat juga dihitung sebagai integral biasa, tentu saja dengan penafsiran yang benar, maksudnya begini :

Contoh :



gambar 4.1.2

Menurut definisi 4.11,

$$I_x = \int_A y^2 \, dA.$$

A dibatasi oleh : x = 0, x = b, y = 0 dan y = h.

$$\text{Jadi, } I_x = \int_0^h \int_0^b y^2 \, dx \, dy \qquad (4.1.5)$$

$$I_x = \int_0^h y^2 \, b \, dy \qquad (4.1.6)$$

$$I_x = \frac{1}{3} b h^3 \qquad (4.1.7)$$

Dalam (4.1.5), $\int_o^b y^2\,dx = y^2 b$, sehingga (4.1.5)

menjadi

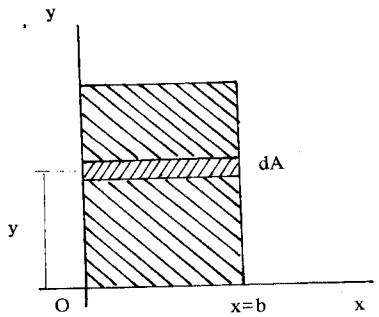
$$I_x = \int_o^h y^2\, b\, dy \qquad (4.1.8)$$

Secara geometris, integral (4.1.8) sering ditafsirkan sebagai :

$$I_x = \int_A y^2\, dA \qquad (4.1.9)$$

dengan dA = b dy

(gambar 4.13)



gambar 4.1.3

Sebenarnya dengan menganggap bahwa dA = b dy, atau dA sebagai elemen lajur kita sudah "menyimpang" dari definisi yang kita tentukan semula. Cobalah kita kembali sebentar ke definisi tentang momen inersia, di sana dengan jelas ditentukan bahwa yang dimaksudkan dengan y adalah ordinat elemen dA (= dx dy), yakni jarak elemen dx dy terhadap sumbu X, demikian pula halnya dengan absis elemen dx dy. Dengan mengambil dA = b dy, jarak y menjadi tidak jelas, terhadap titik berat dA kah ? Atau jarak rata-ratanya kah ? Lalu bagaimana pula harus kita hitung momen sentrifugal S_{xy}, terhadap titik lajur dA manakah jarak x harus diukur ?

Kita memang bisa "memanipulasi" persamaan sehingga kesulitan yang disebut di atas dapat diatasi, tetapi secara umum hal tersebut malahan akan menjadi lebih sulit ketimbang menghitung integral lipat-dua yang merupakan suatu cara yang tepat dan sesuai dengan definisinya. Oleh karena itu dalam perhitungan selanjutnya, cara dengan integral lipat-dualah yang akan digunakan.

4.2. Perhitungan Momen Inersia Penampang Baku.

Dalam teknik sipil, umumnya momen inersia penampang terhadap garis berat atau titik beratnyalah yang digunakan. Oleh karena itu, momen-momen inersia penampang terhadap garis berat (titik berat) dinamakan secara khusus, *momen inersia pribadi*. Selain itu, penampang yang digunakan umumnya berbentuk segi empat, segi tiga, lingkaran atau paduan bentuk-bentuk baku tersebut. Oleh karena itu, sebelum kita hitung momen inersia pelbagai bentuk penampang baku, kita turunkan dulu beberapa rumus penting berikut ini.

Rumus 4.2.1 : $I_p = I_x + I_y$

Karena, $I_p = \int_A r^2\, dA = \int_A (x^2 + y^2)\, dA$

Atau $I_p = \int_A x^2\, dA + \int_A y^2\, dA$

Misalkan koordinat Cartesian titik berat suatu penampang yang luasnya A adalah T (h, v), garis berat vertikal dan horisontalnya kita namakan sumbu V dan H. Jika I_x^*, I_y^* dan I_p^* adalah momen inersia penampang A terhadap sumbu H, V dan titik berat T; serta S_{xy}^* momen sentrifugal penampang A terhadap sumbu H dan V, maka :

Rumus 4.2.2 : $I_x^* = I_x - v^2 A$

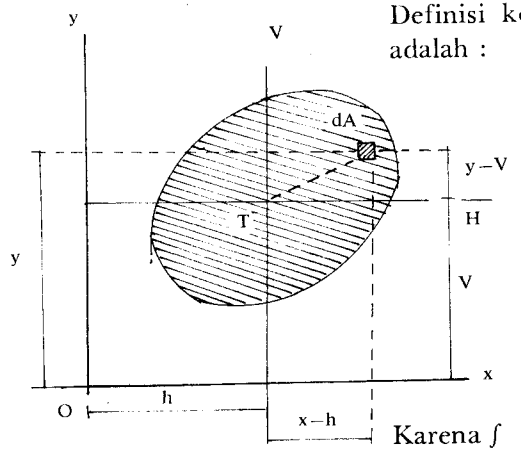
Rumus 4.2.3 : $I_y^* = I_y - h^2 A$

Rumus 4.2.4 : $I_p^* = I_p - (h^2 + v^2)\,A$

Rumus 4.2.5 : $S_{xy}^* = S_{xy} - hv\,A$

Rumus 4.2.6 : $I_p^* = I_x^* + I_y^*$

Bukti :



gambar 4.2.1

Definisi koordinat titik berat adalah :

$$h = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}\,; \qquad v = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA}.$$

Karena $\int_A dA = A$, luas penampang A, maka kita peroleh :

$$\int_A x\,dA = h\,A \qquad (4.2.1)$$

$$\int_A y\,dA = v\,A, \qquad (4.2.2)$$

$$I_x^* = \int_A (y - v)^2\,dA$$

$$I_x^* = \int_A y^2\,dA - 2v\int_A y\,dA + v^2 \int_A dA \qquad (4.2.3)$$

Pergantian (4.2.2) ke dalam (4.2.3) menghasilkan :

$I_x^* = I_x - 2v(v\,A) + v^2\,A$, atau

$I_x^* = I_x - v^2\,A.$

Dengan cara yang serupa Rumus 4.2.3 mudah dibuktikan, cobalah.

$$I_p^* = \int_A ((y - v)^2 + (x - h)^2)\,dA$$

$$= \int_A (y - v)^2\,dA + \int_A (x - h)^2\,dA$$

$$I_p^* = I_x^* + I_y^* \qquad (4.2.4)$$

Pergantian dengan rumus 4.2.2 dan 4.2.3 ke dalam persamaan (4.2.4) menghasilkan :

$I_p^* = I_x - v^2A + I_y - h^2A$. Menurut rumus 4.2.1, $I_x + I_y = I_p$, jadi :

$$I_p^* = I_p - (v^2 + h^2)\,A.$$

$$S_{xy}^* = \int_A (x - h)(y - v)\,dA$$

$$= \int_A (xy - hy - vx + hv)\,dA, \text{ atau}$$

$$S_{xy}^* = \int_A xy\,dA - h\int_A y\,dA - v\int_A x\,dA + hv\int_A dA \qquad (4.2.5)$$

Pergantian dengan persamaan (4.2.1) dan (4.2.2) ke dalam (4.2.5) menghasilkan :

$$S_{xy}^* = S_{xy} - h\,(vA) - v(h\,A) + h\,v\,A$$

$$= S_{xy} - hvA.$$

Rumus-rumus yang baru saja diturunkan berguna karena :

1. Walaupun tujuan kita adalah menghitung momen inersia pribadi suatu penampang, tetapi dalam banyak hal menghitung momen inersianya terhadap garis-garis (titik) tertentu (yang kita jadikan sumbu X dan sumbu Y) lebih dulu, baru kemudian menghitung momen inersia pribadinya akan lebih mudah. Sedangkan perkara penentuan letak titik beratnya memang merupakan syarat perlu untuk menghitung momen inersia pribadi di suatu penampang.

2. Sebaliknya, jika telah kita ketahui momen inersia pribadi suatu penampang, kita dapat menghitung momen inersianya terhadap garis mana saja yang sejajar garis berat yang bersangkutan. Misalnya, dari rumus 4.2.2. kita peroleh :

$$I_x = I_x^* + v^2 A \qquad (4.2.6)$$

dengan :

v = jarak garis beratnya ke garis sembarang yang sejajar garis berat tersebut.

Untuk jelasnya, lihatlah contoh-contoh berikut :

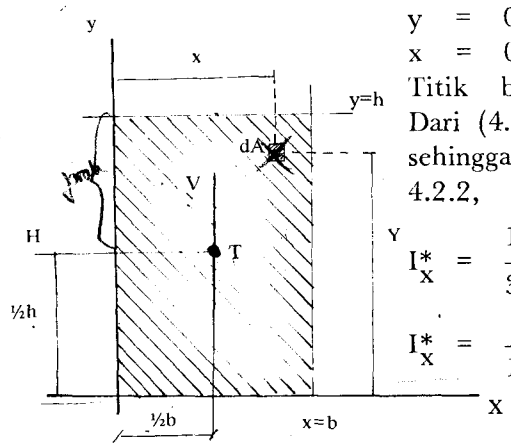
Contoh 4.2.A :

Penampang A berbentuk empat persegi panjang, b x h. A dibatasi oleh :

y = 0, y = h

x = 0, x = b

Titik berat T (½b, ½h). Dari (4.1.7) : $I_x = 1/3\ bh^3$, sehingga berdasarkan rumus 4.2.2,



gambar 4.2.A.1

$$I_x^* = \frac{1}{3} bh^3 - (½h)^2\ bh$$

$$I_x^* = \frac{1}{12} bh^3 \qquad (4.2.A.1)$$

$$I_y = \int_A x^2\ dA = \int_o^b \int_o^h x^2\ dy\ dx = \int_o^b x^2\ h\ dy$$

$$I_y = \frac{1}{3} b^3 h \qquad (4.2.A.2)$$

Menurut rumus 4.2.3, $I_y^* = I_y - (½h)^2 bh$, sehingga

$$I_y^* = \frac{1}{12} b^3 h \qquad (4.2.A.3)$$

Menurut rumus 4.2.6, $I_p^* = I_x^* + I_y^*$, sehingga

$$I_p^* = \frac{1}{12} bh(b^2 + h^2) \qquad (4.2.A.4)$$

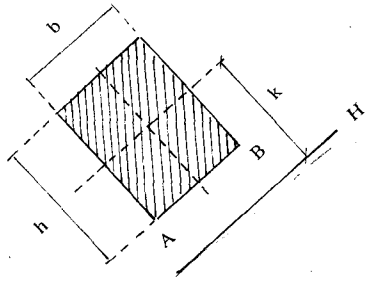
$$S_{xy} = \int_A xy\ dA = \int_o^h \int_o^b xy\ dx\ dy = ½b^2 \int_o^h y\ dy$$

$$S_{xy} = ¼\ b^2 h^2 \qquad (4.2.A.5)$$

Dan, menurut rumus 4.2.5, $S_{xy}^* = S_{xy} - (½b)(½h)\ bh$. Gunakan hasil (4.2.A.5) kita peroleh :

$$S_{xy}^* = 0 \qquad (4.2.A.6)$$

Dalam contoh 4.2.A sudah kita hitung momen-momen inersia pribadi penampang berbentuk persegi panjang bxh. Selanjutnya akan kita hitung momen inersia penampang tersebut terhadap garis sejajar garis beratnya dengan menggunakan hasil pada contoh 4.2.A, atau, momen inersia penampang terhadap garis H yang berjarak k dengan garis berat yang sejajar sisi AB yang panjangnya = b (gambar 4.2.A.2).



gambar 4.2.A.2

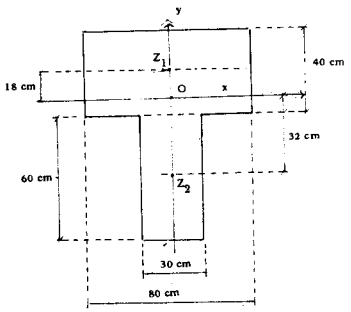
Dalam gambar 4.2.A.2, baik penampang maupun garis H dibuat miring, supaya kita ingat bahwa garis terhadap mana momen inersia penampang hendak dihitung tidak perlu horisontal, demikian pula letak penampangnya tidak perlu selalu "enak" dilihat. Yang penting adalah posisi relatif penampang terhadap garis H. (ingatlah letak gordin pada atap rumah).

Baiklah, menurut (4.2.A1) momen inersia pribadi penampang tersebut terhadap garis berat yang sejajar sisi AB adalah 1/12 bh^3. Dengan menganggap garis H sebagai sumbu X kita bisa menggunakan persamaan (4.2.6) untuk menghitung I_h (momen inersia penampang terhadap garis H), yakni :

$$I_h = \frac{1}{12} bh^3 + k^2 bh \qquad (4.2.A.7)$$

Contoh 4.2.B :

Penampang A berbentuk huruf T.



gambar 4.2.B.1

Letak titik beratnya 62 cm dari sisi terbawah dan 40 cm dari sisi terkiri (gambar 4.2.B.1). Tanpa kehilangan sifat umumnya, kita buat salib sumbu Cartesian XOY melalui titik beratnya.
Sebagai akibat, $I_X = I_X^*$, $I_y = I_y^*$, $I_p = I_p^*$ dan $S_{xy} = S_{xy}^*$.
Bagilah penampang A menjadi :
A_1, luasnya = 80 x 40 cm^2,
titik beratnya Z_1 (0, 18) ;
dan A_2, luasnya ; 30 x 60 cm^2
titik beratnya Z_2 (0, −32).

Karena A terbagi menjadi A_1 dan A_2 oleh garis yang sejajar sumbu x, maka : (**)

(**) Lihat buku "Differential and Integral Calculus" oleh Piskunov, MIR Publishers, Moscow, halaman 613.

$$I_X = \int_A y^2\, dA = \int_{A_1} y^2\, dA_1 + \int_{A_2} y^2\, dA_2$$

atau,

$$I_X = I_{X_1} + I_{X_2} \qquad (4.2.B.1)$$

dengan

$$I_{X_1} = \int_{A_1} y^2\, dA_1 \quad \text{dan} \quad I_{X_2} = \int_{A_2} y^2\, dA_2$$

Menurut persamaan (4.2.A.7) :

$$I_{X_1} = \frac{1}{12}(80)(40)^3 + (18)^2(40)(80)$$
$$= 1463466{,}666\ cm^4$$
$$I_{X_2} = \frac{1}{12}(30)(60)^3 + (-32)^2(30)(60)$$
$$= 2383200\ cm^4$$

sehingga

$$I_X = (1463466{,}666 + 2383200)\ cm^4$$
$$= 384666{,}666\ cm^4$$
$$I_p = I_{p_1} + I_{p_2} \qquad (4.2.B.2)$$

Menurut persamaan (4.2.A.4),

$$I^*_{p_1} = \frac{1}{12}(80)(40)(40^2 + 80^2)\ cm^4$$
$$= 2133333{,}332\ cm^4$$

dan

$$I^*_{p_2} = \frac{1}{12}(30)(60)(30^2 + 60^2)\ cm^4$$
$$= 675000\ cm^4$$

Menurut rumus 4.2.4,

$$I_{p_1} = (2133333{,}332 + (0^2 + 18^2)(80)(40)\ cm^4$$
$$= 3170133{,}332\ cm^4$$

dan

$$I_{p_2} = (675000 + ((0^2 + (-32)^2)(30)(60))\ cm^4$$
$$= 2518200\ cm^4$$

sehingga, menurut (4.2.B.2),

$$I_p = 5688333{,}333 \text{ cm}^4$$

Untuk menghitung I_y kita bisa menggunakan rumus 4.2.1,

$$I_y = I_p - I_x = 1841666{,}667 \text{ cm}^4$$

Atau,

$$I_y = \int_{A_1} x^2 \, dA_1 + \int_{A_2} x^2 \, dA_2 = I_{y_1} + I_{y_2}$$

Dengan menggunakan persamaan (4.2.A.3),

$$I_{y_1} = \frac{1}{12}(80)^3(40) \text{ cm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{1}{12}(30)^3(60) \text{ cm}^4$$

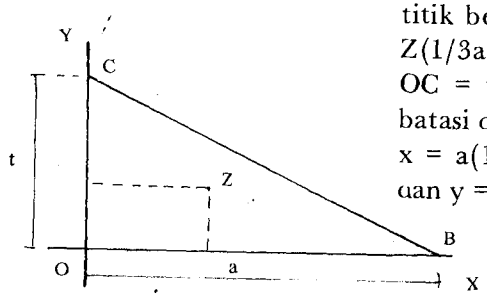
sehingga $I_y = 1841666{,}666 \text{ cm}^4$.

Dengan menggunakan(4.2.A.6) dan rumus 4.2.5, kita peroleh :

$$S_{xy} = 0 + (0)(18)3200 + 0 + (0)(-32)1800 = 0.$$

Conton 4.2.C : Penampang berbentuk segitiga.

Kita awali penurunan rumus untuk segitiga sembarang dengan tinjauan khusus tentang segitiga siku-siku. Lihat gambar 4.2.C.1, dengan sistem koordinat Cartesian seperti itu, titik berat segitiga OBC adalah Z(1/3a, 1/3t), jika OB = a, OC = t, dan segitiga OBC dibatasi oleh : $x = a(1 - y/t)$, $x = 0$, $y = 0$ dan $y = t$.



gambar 4.2.C.1

$$I_x = \int_0^t \int_0^{a(1-y/t)} y^2 \, dx \, dy \qquad (4.2.C.1)$$

$$= \int_0^t y^2 \, a(1-y/t) dy$$

$$I_x = \frac{1}{12} at^3 \qquad (4.2.C.2)$$

Dengan rumus 4.2.2, $I_x^* = \frac{1}{12}at^3 - (\frac{t}{3})^2 \, ½at$

atau,

$$I_y^* = \frac{1}{36}at^3 \qquad (4.2.C.3)$$

Dengan sedikit mengubah acuan, sumbu X dipandang sebagai sumbu Y dan sebaliknya, maka mudah dimengerti bahwa :

$$I_y^* = \frac{1}{36}a^3 t \qquad (4.2.C.4)$$

Dan dengan rumus 4.2.6, persamaan (4.2.C.3) dan (4.2.C.4),

$$I_p^* = \frac{1}{36}at(a^2 + t^2) \qquad (4.2.C.5)$$

$$S_{xy} = \int_0^t \int_0^{a(1-y/t)} xy \, dx \, dy$$

$$= \int_0^t ½ a^2 (1 - y/t)^2 \, y \, dy$$

$$S_{xy} = \frac{1}{24} a^2 t^2 \qquad (4.2.C.6)$$

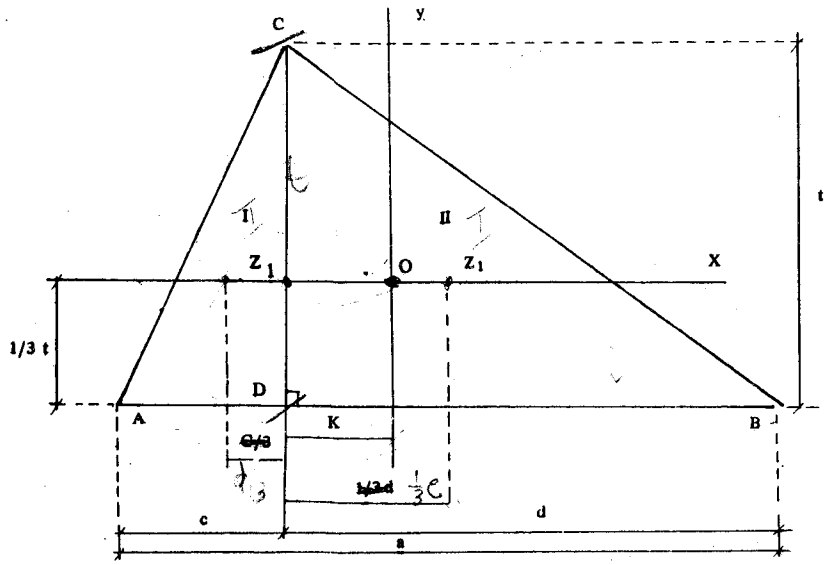
Dengan rumus 4.2.5 dan persamaan (4.2.C.6),

$$S_{xy}^* = \frac{1}{24} a^2 t^2 - (1/3a)(1/3t)½at$$

atau, $S_{xy}^* = -\frac{1}{72} a^2 t^2 \qquad (4.2.C.7)$

Dengan hasil-hasil di atas akan kita turunkan rumus-rumus untuk menghitung momen inersia pribadi segitiga sembarang sebagai berikut :

Pandang segitiga ABC yang akan kita bagi dengan garis tinggi CD menjadi dua bagian, sebutlah CD = t, AD = c, DB = d dan AB = c + d = a (gambar 4.2.C.2)



gambar 4.2.C.2

Dengan ilmu ukur atau dengan perhitungan melalui definisi titik berat mudah ditentukan bahwa jarak garis berat vertikal (yang kita jadikan sumbu Y) dengan garis tinggi CD adalah k = 1/3 (d − c), jika d ⩾ c; sedangkan jarak garis berat horisontal (yang kita jadikan sumbu X) dengan sisi alas adalah 1/3 t, sehingga koordinat titik berat segitiga ADC, adalah Z_1 (−d/3, 0) dan titik berat segitiga BDC adalah Z_2 (c/3, 0). Dengan demikian dapatlah kita tentukan besaran-besaran berikut :

Seperti biasa, semua besaran yang belum diketahui yang menyangkut segitiga ADC kita beri indeks 1, dan yang menyangkut segitiga BDC kita beri indeks 2. Menurut (4.2.C.3),

$$I_{x_1} = \frac{1}{36} ct^3$$

dan

$$I_{x_2} = \frac{1}{36} dt^3 \text{, sehingga}$$

$$I_x = \frac{1}{36} t^3 (c + d) = \frac{1}{36} at^3 \qquad (4.2.C.8)$$

Menurut rumus 4.2.3 dan persamaan (4.2.C.4),

$$I_{y_1} = \frac{1}{36} tc^3 + \left(- \frac{1}{3} d\right)^2 \tfrac{1}{2} ct$$

$$I_{y_2} = \frac{1}{36} td^3 + \left(\frac{1}{3} c\right)^2 \tfrac{1}{2} dt \text{ sehingga}$$

$$I_y = \frac{1}{36} t (c^3 + d^3) + \frac{1}{18} dct (d + c)$$

$$I_y = \frac{1}{36} ta (a^2 - cd) \qquad (4.2.C.9)$$

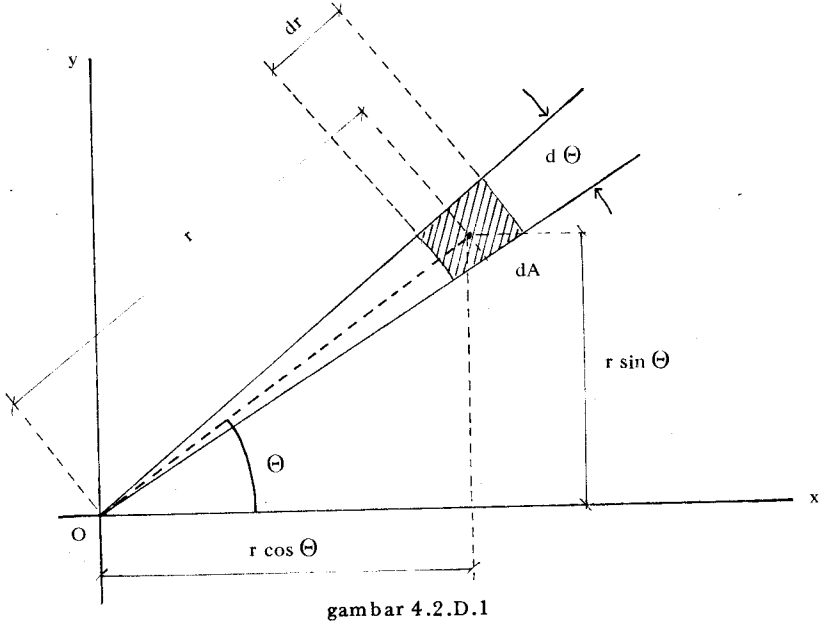
Dan karena $I_p = I_x + I_y$, maka

$$I_p = \frac{1}{36} at (a^2 + t^2 - cd) \qquad (4.2.C.10)$$

Akhirnya dengan cara serupa kita peroleh :

$$S_{xy} = - \frac{1}{72} t^2 (a^2 - 2 cd) \qquad (4.2.C.11)$$

Contoh 4.2.D : Penampang berbentuk lingkaran dengan jari-jari = r.



gambar 4.2.D.1

Untuk perhitungan momen inersia penampang berbentuk lingkaran, akan kita gunakan koordinat polar karena lebih mudah (gambar 4.2.D.1). Di dalam kalkulus sudah kita pelajari hubungan antara koordinat Cartesian (x,y) dengan koordinat polar (r, Θ), yakni :

$$y = r \sin \Theta$$

$$x = r \cos \Theta$$

dan $\int_A g(x,y)\, dA = \int_A G(r,\Theta)\, r\, dr\, d\Theta$

Dengan menggunakan koordinat polar, definisi 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 dan 4.1.4 menjadi :

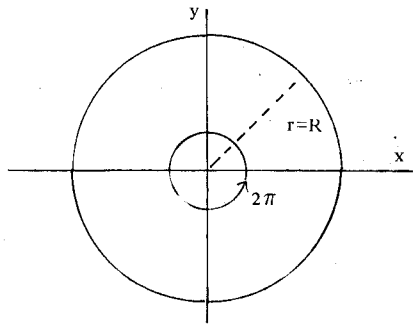
$$I_x = \int_A \int (r \sin \Theta)^2\, r\, dr\, d\Theta \qquad (4.2.D.1)$$

$$I_y = \int_A \int (r \cos \Theta)^2\, r\, dr\, d\Theta \qquad (4.2.D.2)$$

$$I_p = \int_A \int (r^2)\, r\, dr\, d\Theta \qquad (4.2.D.3)$$

$$S_{xy} = \int_A \int (r \sin \Theta)(r \cos \Theta)\, r\, dr\, d\Theta \qquad (4.2.D.4)$$

Untuk penampang berbentuk lingkaran, dapat kita hitung langsung momen inersia pribadinya, karena titik beratnya adalah pusat lingkarannya.



gambar 4.2.D.2

Dalam koordinat polar, persamaan lingkaran yang pusatnya di titik O (gambar 4.2.D.2) adalah r = R, sehingga daerah integralnya dibatasi oleh : r = 0, r = R, Θ = 0 dan Θ = 2 π.

$$I_p = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} r^3\, dr\, d\Theta = \tfrac{1}{4} R^4 \int_0^{2\pi} d\Theta$$

$$I_p = \tfrac{1}{2} \pi R^4 \qquad (4.2.D.5)$$

Untuk menghitung I_x dan I_y, kita pakai rumus 4.2.1 karena jelas bahwa $I_x = I_y$, sehingga kita peroleh : $I_x = I_y = \tfrac{1}{2} I_p$, atau

$$I_x = I_y = \tfrac{1}{4}\pi R^4. \qquad (4.2.D.6)$$

Sebagai latihan, hitunglah I_x langsung dari (4.2.D.1).

Dengan menggunakan (4.2.D.4) kita hitung,

$$S_{xy} = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} r^3 \sin \Theta \cos \Theta\, dr\, d\Theta$$

$$S_{xy} = \tfrac{1}{4} R^4 \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} \sin 2\Theta \, d\Theta$$

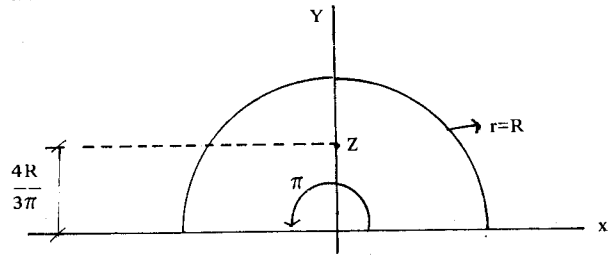
$$S_{xy} = 0$$

Contoh 4.2.E : Penampang berbentuk setengah lingkaran dengan jari-jari R.

Dengan mengambil titik pusat lingkaran sebagai titik pusat sistem koordinat Cartesian (polar), maka titik berat penampang setengah lingkaran adalah

$$Z \quad (0, \frac{4R}{3\pi}),$$

karena ia simetris terhadap sumbu Y, dan ordinat titik beratnya adalah :



gambar 4.2.E.1

$$v = \frac{\int_A y \, dA}{\int_A dA}$$, atau dengan menggunakan koordinar polar,

$$\int_A y \, dA = \int_0^{\pi} \int_0^{R} (r \sin \Theta) \, r \, dr \, d\Theta = 1/3 \, R^3 \int_0^{\pi} \sin \Theta \, d\Theta$$

$$= \frac{2}{3} R^3$$

dan $\int_A dA$ = luas setengah lingkaran = $\tfrac{1}{2} \pi R^2$.

$$I_x = \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^3 \sin^2 \Theta \, dr \, d\Theta = \tfrac{1}{4} R^4 \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\Theta) d\Theta$$

$$I_x = \frac{1}{8} \pi R^4 \qquad (4.2.E.1)$$

Dengan menggunakan rumus 4.2.2 dan v = 4R/3π, maka momen inersia pribadinya adalah :

$$I_x^* = \frac{1}{8} \pi R^4 - (\frac{4R}{3\pi})^2 (\tfrac{1}{2}\pi R^2)$$

$$I_x^* = 0{,}1098 \, R^4 \qquad (4.2.E.2)$$

$$I_y = \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^3 \cos^2 \Theta \, dr \, d\Theta = \tfrac{1}{4} R^4 \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\Theta) d\Theta$$

$$I_y = \frac{1}{8} \pi R^4 \qquad (4.2.E.3)$$

Karena sumbu Y merupakan garis berat vertikalnya, $I_y = I_y^*$.

$I_p^* = I_x^* + I_y^*$, dengan menggunakan hasil (4.2.E.2) dan (4.2.E.3) kita peroleh :

$$I_p^* = 0{,}5025 \, R^4 \qquad (4.2.E.4)$$

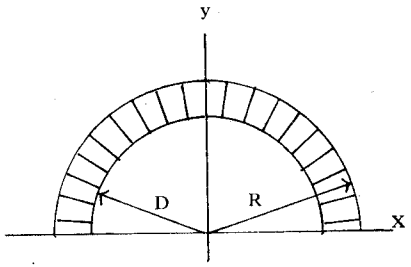
$$S_{xy} = \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^3 \sin\Theta \cos\Theta \, dr \, d\Theta = \tfrac{1}{4} R^4 \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2} \sin 2\Theta \, d\Theta$$

$$S_{xy} = 0 \qquad (4.2.E'5)$$

Karena sumbu Y merupakan salah satu garis beratnya, atau absis titik beratnya, h = 0, maka menurut rumus 4.2.5:

$$S_{xy}^* = S_{xy} = 0 \qquad (4.2.E.6)$$

Contoh 4.2.F : Penampang berbentuk gelang lingkaran dengan jari-jari luar R dan jari-jari dalam D (gambar 4.2.F.1)



gambar 4.2.F.1

Dengan menempatkan titik pusat lingkaran luar (dalam) sebagai titik pusat sistem koordinat Cartesian (polar), maka penampang tersebut dibatasi oleh :
$r = R$, $r = D$, $\Theta = 0$ dan $\Theta = 2\pi$.

$$I_p = \int_0^{2\pi} \int_D^R r^3 \, dr \, d\Theta$$

$$I_p = \tfrac{1}{2}\pi (R^4 - D^4) \qquad (4.2.F.1)$$

Seperti dalam contoh 4.2.D, karena bentuk penampang simetris,

$$I_x = I_y = \tfrac{1}{2} I_p,$$

$$I_x = I_y = \tfrac{1}{4}\pi (R^4 - D^4) \qquad (4.2.F.2)$$

Mudah dibuktikan bahwa $S_{xy} = 0$, cobalah.

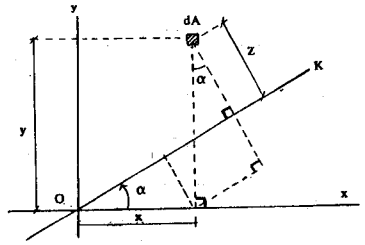
4.3. Momen inersia Ekstrim.

Sebagaimana telah dikemukakan pada pengantar bab ini, momen inersia suatu penampang adalah faktor kekakuan suatu balok atau bagian suatu bangunan, dan umumnya kita ingin momen inersia yang besar, dan menghindari momen inersia yang kecil.

Hal yang akan kita persoalkan selanjutnya adalah : Jika ukuran dan bentuk balok telah ditentukan, terhadap garis berat yang manakah momen inersia pribadi suatu penampang akan mencapai harga ekstrim, maksimum atau minimum. (Ingat bahwa ada tak hingga banyaknya garis berat suatu penampang, setiap garis lurus yang melalui titik berat penampang adalah garis berat).

Dari antara tak hingga banyaknya garis berat suatu penampang, kita pilih dua buah yang saling tegak lurus dan kita jadikan mereka sebagai sumbu-sumbu koordinat Cartesian. Dengan demikian, titik berat penampang berimpit dengan pusat salib sumbu dan setiap momen inersia terhadap sembarang garis yang melalui pusat sumbu adalah momen inersia pribadi. Kemudian, akan kita cari : "Momen inersia penampang terhadap garis berat manakah yang mencapai ekstrim, dan berapakah besarnya?".

Perhatikan gambar 4.3.1 di bawah ini, sebutlah garis berat penampang yang membentuk sudut α dengan sumbu X positif sebagai garis OK, dan momen inersia terhadap garis tersebut sebagai I.



gambar 4.3.1

$$I = \int_A z^2 \, dA \qquad (4.3.1)$$

dengan :
z = jarak dA ke garis OK, atau,
$z^2 = (y \cos\alpha - x \sin\alpha)^2$,
sehingga (4.3.1) menjadi :

$$I = \int_A (y^2 \cos^2\alpha + x^2 \sin^2\alpha - 2xy \sin\alpha \cos\alpha) \, dA$$

$$I = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - S_{xy} \sin 2\alpha \qquad (4.3.2)$$

Untuk mencari α yang membuat I mencapai harga ekstrim, kita turunkan persamaan (4.3.2) terhadap α,

$$\frac{dI}{d\alpha} = I_x(-2 \cos\alpha \sin\alpha) + I_y(2 \sin\alpha \cos\alpha) - 2 S_{xy} \cos 2\alpha$$

$$\frac{dI}{d\alpha} = (-I_x + I_y) \sin 2\alpha - 2 S_{xy} \cos 2\alpha \qquad (4.3.3)$$

Karena I dapat diturunkan terhadap α untuk setiap α, maka jika I mencapai ekstrim,

$$\frac{dI}{d\alpha} = 0, \text{ atau}$$

$$(-I_x + I_y) \sin 2\alpha = 2 S_{xy} \cos 2\alpha \qquad (4.3.4)$$

Karena suatu persamaan tidak boleh kita bagi dengan bilangan nol, maka kita lihat dulu hal-hal khusus berikut :

a. Jika $I_x = I_y$ dan $S_{xy} = 0$, maka persamaan (4.3.4) dipenuhi oleh α berapa saja, dan $I = I_x = I_y$ untuk setiap α dari persamaan (4.3.2). Ini berarti semua momen inersia pribadi sama besar.

b. Jika $I_x = I_y$ dan $S_{xy} \neq 0$, maka $\cos 2\alpha = 0$ sehingga, $\alpha_1 = 45^o$ dan menurut (4.3.2), $I = I_x - S_{xy}$, atau $\alpha_2 = 135^o$ dan menurut (4.3.2), $I = I_x + S_{xy}$.

   Karena I_x dan I_y selalu positif (lihat definisinya), maka jika $S_{xy} < 0$, I maksimum $= I_x - S_{xy}$ untuk $\alpha_1 = 45^o$ dan
   I minimum $= I_x + S_{xy}$ untuk $\alpha_2 = 135^o$.
   dan sebaliknya jika $S_{xy} > 0$.

c. Jika $I_x \neq I_y$ dan $S_{xy} = 0$, $\sin 2\alpha = 0$, sehingga,
   $\alpha_1 = 0$ dan menurut (4.3.2), $I = I_x$, atau
   $\alpha_2 = 0$ dan menurut (4.3.2), $I = I_y$.
   Jika I_x maksimum maka I_y minimum, dan sebaliknya.

d. Hal yang lebih umum adalah jika $I_x \neq I_y$, dan $S_{xy} \neq 0$ sehingga $\cos 2\alpha \neq 0$, dan dari (4.3.4) kita peroleh :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 S_{xy}}{-I_x + I_y} \qquad (4.3.5)$$

Jenis ekstrim apakah yang dicapai oleh I dengan α yang memenuhi persamaan (4.3.5) tersebut dapat ditentukan dengan memeriksa turunan keduanya. Turunkan (4.3.3) terhadap α,

$$\frac{d^2 I}{d\alpha^2} = (-I_x + I_y) 2 \cos 2\alpha + 4 S_{xy} \sin 2\alpha \qquad (4.3.6)$$

Karena α memenuhi persamaan (4.3.5) maka dengan menggunakan $(-I_x + I_y) = 2 S_{xy} \operatorname{ctg} 2\alpha$, persamaan (4.3.6) menjadi:

$$\frac{d^2 I}{d\alpha^2} = \frac{4 S_{xy}}{\sin 2\alpha} \qquad (4.3.7)$$

Marilah kita perhatikan kembali persamaan (4.3.5). Ada dua harga α, sebutlah α_1 memenuhi (4.3.5), maka $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^o$ juga memenuhi (4.3.5) karena $\operatorname{tg} 2\alpha_2 = \operatorname{tg} 2(\alpha_1 + 90^o) = \operatorname{tg}(2\alpha_1 + 180^o) = \operatorname{tg} 2\alpha_1$.

Akibatnya, $\sin 2\alpha_2 = \sin 2(\alpha_1 + 90^o) = -\sin 2\alpha_1$, sehingga dari (4.3.7) dapat kita simpulkan bahwa jika α membuat I maksimum maka α_2 akan membuat I minimum, dan sebaliknya.
Lebih lanjut dapat juga kita cari hubungan antara I maksimum dan I minimum sebagai berikut :

Tanpa kehilangan sifat umumnya, andaikanlah bahwa α_1 yang membuat I maksimum, sebutlah sebagai I_M; dan α_2 membuat I minimum, sebutlah sebagai I_m.

Karena $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^o$, maka $\sin \alpha_2 = \cos \alpha_1$,
$\cos \alpha_2 = -\sin \alpha_1$ dan $\sin 2\alpha_2 = -\sin 2\alpha_1$ sehingga menurut (4.3.2),

$$I_M = I_x \cos^2 \alpha_1 + I_y \sin^2 \alpha_1 - S_{xy} \sin 2\alpha_1 \qquad (4.3.8)$$

$$I_m = I_x \cos^2 \alpha_2 + I_y \sin^2 \alpha_2 - S_{xy} \sin 2\alpha_2 \quad \text{atau}$$

$$I_m = I_x \sin 2\alpha_1 + I_y \cos^2 \alpha_1 + S_{xy} \sin 2\alpha_1 \qquad (4.3.9)$$

Jumlahkan (4.3.8) dengan (4.3.9) kita peroleh :

$$I_M + I_m = I_x + I_y \qquad (4.3.10)$$

Lihatlah kembali persamaan (4.3.5), walaupun ia diperoleh dengan syarat $I_x \neq I_y$ dan $S_{xy} \neq 0$, namun ia berlaku juga untuk kasus b dan c, sehingga secara menyeluruh dapatlah kita simpulkan hal berikut :

Untuk mencari I ekstrim, tentukanlah dulu sudut α yang memenuhi :

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2 S_{xy}}{-I_x + I_y},$$

apabila $S_{xy} \neq 0$ dan $I_x \neq I_y$.

Salah satu I ekstrim, sebutlah sebagai I_1, adalah :

$$I_1 = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - S_{xy} \sin 2\alpha \qquad (4.3.11)$$

dengan : garis berat yang bersangkutan, sebutlah OK, membentuk sudut α dengan sumbu X positif.

I ekstrim yang lainnya, sebutlah sebagai I_2, dapat dicari dari persamaan (4.3.10), atau

$$I_2 = I_x + I_y - I_1 \qquad (4.3.12)$$

dengan : garis berat yang bersangkutan, sebutlah OL, membentuk sudut $\alpha + 90^o$ dengan sumbu X positif.

Jika I_1 maksimum maka I_2 minimum, dan sebaliknya.
Dan, jika $S_{xy} = 0$ serta $I_x = I_y$, maka

$$I_1 = I_2 = I_x = I_y \qquad (4.3.13)$$

Atau, terhadap garis berat mana saja momen inersianya sama besar.

Untuk pemudahan pembahasan selanjutnya kita tentukan istilah-istilah sebagai berikut :
Garis-berat garis-berat, terhadap mana momen inersia pribadi suatu penampang mencapai harga ekstrim kita sebut SUMBU-SUMBU INERSIA PUSAT UTAMA, momen inersia

yang bersangkutan kita sebut MOMEN INERSIA PRIBADI UTAMA.

Contoh 4.3.A : Penampang berbentuk empat persegi panjang gxh.

Dari contoh 4.2.4. kita tahu bahwa

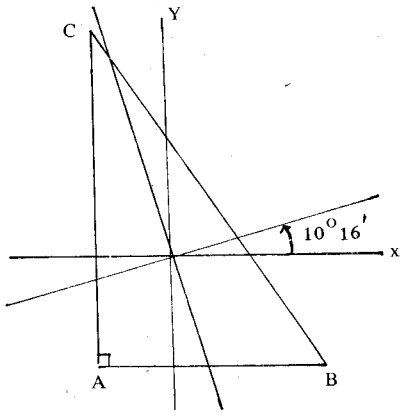
$$I_x^* = \frac{1}{12} bh^3, \; I_y^* = \frac{1}{12} b^3 h \text{ dan } S_{xy}^* = 0,$$

sehingga jika $b < h$ maka I maksimum, $I_M = I_x^*$; dan I minimum, $I_m = I_y^*$; dengan sumbu X dan sumbu Y adalah sumbu-sumbu inersia pusat utama.

Contoh 4.3.B : Penampang berbentuk lingkaran dengan jari-jari R.

Dari contoh 4.2.D kita tahu bahwa $S_{xy}^* = 0$, dan $I_x^* = I_y^*$, sehingga momen inersia pribadi terhadap setiap garis berat sama besar.

Contoh 4.3.C : Penampang segitiga siku-siku ABC seperti tergambar 4.3.C.1 di bawah ini :



gambar 4.3.C.1

AC = 9 cm, AB = 3 cm.
Dari contoh 4.2.C kita tahu bahwa :

$$I_x = \frac{1}{36}(3)(9)^3$$
$$= 60{,}75 \text{ cm}^4$$
$$I_y = \frac{1}{36}(9)(3)^3$$
$$= 6{,}75 \text{ cm}^4$$
$$S_{xy} = -\frac{1}{72}(9)^2(3)^2$$
$$= -10{,}125 \text{ cm}^4$$

sehingga kita dapatkan,

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2(-10{,}125)}{-60{,}75+6{,}75} = 0{,}375$$

$\alpha = 10^o\ 16'$, $\sin^2 \alpha = 0{,}03184$, $\cos^2 \alpha = 0{,}96816$ dan $\sin 2\alpha = 0{,}35112$.

$$I_1 = (60{,}75)(0{,}96816) + (6{,}75)(0{,}03184) - (-10{,}125)(0{,}35112)$$
$$= 62{,}586 \text{ cm}^4$$

$I_2 = I_x + I_y - I_1 = 60{,}75 + 6{,}75 - 62{,}586 = 4{,}914 \text{ cm}^4$.

Jelas bahwa I_1, momen inersia pribadi utama yang bersudut $10^o\ 16'$ dengan sumbu X positif, adalah I maksimum; dan I_2, momen inersia pribadi utama yang bersudut $100^o\ 16'$ dengan sumbu X positif, adalah I minimum.

Contoh-contoh lainnya akan disatukan dengan contoh-contoh untuk ellips inersia pada halaman selanjutnya.

4.4 Elips Inersia.

Di dalam uraian sebelumnya kita lihat bahwa dengan memilih sepasang garis berat sembarang yang saling tegak lurus sebagai sumbu X dan sumbu Y, serta menghitung besar I_X dan I_y, maka dengan sumbu-sumbu tersebut sebagai acuan kita dapat menentukan besar momen inersia penampang terhadap garis berat sembarang lainnya. Dan akhirnya momen-momen inersia pribadi utama beserta sumbu-sumbu inersia pusat utama yang bersangkutan dapat pula ditentukan.

Selanjutnya, apabila sumbu-sumbu inersia pusat utama tersebut kita jadikan sumbu-sumbu koordinat baru, sebutlah sebagai sumbu X' dan sumbu Y', maka I_X, dan I_y, (momen-momen inersia pribadi terhadap sumbu X' dan sumbu Y') merupakan momen-momen inersia pribadi utama penampang yang bersangkutan. Besar momen inersia penampang terhadap garis berat sembarang OL yang bersudut β dengan sumbu X' positif dapat pula kita tentukan dengan rumus : (lihat gambar 4.4.1 dan rumus [4.3.2]).

$$I = I_{x'} \cos^2 \beta + I_{y'} \sin^2 \beta - S_{x'y'} \sin 2\beta \qquad (4.4.1)$$

Tetapi $I = I_{x'} = I$ ekstrim jika $\beta = 0$ dan $dI/d\beta = 0$, atau $(-I_{x'} + I_{y'}) \sin 2\beta - 2 S_{x'y'} \cos 2\beta = 0$, hal tersebut hanya dipenuhi oleh $S_{x'y'} = 0$. Alhasil persamaan (4.4.1) menjadi :

$$I = I_{x'} \cos^2 \beta + I_{y'} \sin^2 \beta \qquad (4.4.2)$$

Bagilah (4.4.2) dengan I kita peroleh :

$$1 = I_{x'} \left(\frac{\cos \beta}{\sqrt{I}}\right)^2 + I_{y'} \left(\frac{\sin \beta}{\sqrt{I}}\right)^2 \qquad (4.4.3)$$

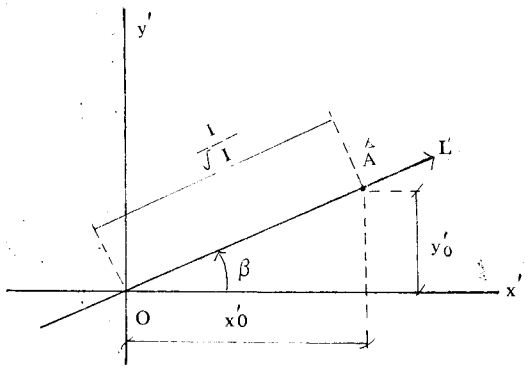
Sekarang tentukanlah titik $A(x'_o , y'_o)$ pada garis berat OL (gambar 4.4.1) sedemikian rupa sehingga $OA = 1/\sqrt{I}$, dan akibatnya tentulah :

$$x'_o = OA \cos \beta = \frac{\cos \beta}{\sqrt{I}}$$

$$\text{dan } y'_o = OA \sin \beta = \frac{\sin \beta}{\sqrt{I}}$$

serta (4.4.3) menjadi :

$$I = I_{x'} (x'_o)^2 + I_{y'} (y'_o)^2 \qquad (4.4.4)$$



gambar 4.4.1

Sebutlah $I_{x'} = \frac{1}{a^2}$ dan $I_{y'} = \frac{1}{b^2}$, sehingga (4.4.4) menjadi :

$$1 = \frac{x'^2_o}{a^2} + \frac{y'^2_o}{a^2} \qquad (4.4.5)$$

Jadi, $A(x'_o, y'_o)$ terletak pada elips dengan panjang

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_{x'}}}$$

dan $b = \frac{1}{\sqrt{I_{y'}}}$

Elips tersebut dikenal dengan nama ELIPS INERSIA !

Contoh 4.4.A : Penampang empat persegi panjang dengan luas 30 x 40 cm^2.

Dari contoh 4.3.A kita ketahui bahwa garis-berat garis-berat yang sejajar sisi-sisinya merupakan sumbu-sumbu inersia pusat utama, sehingga jika kita pilih sumbu-sumbu inersia pusat utama tersebut sebagai sumbu X dan sumbu Y,

$I_X = \frac{1}{12}(30)(40)^3 = 160000\ cm^4$ dan

$I_Y = \frac{1}{12}(40)(30)^3 = 90000\ cm^4$

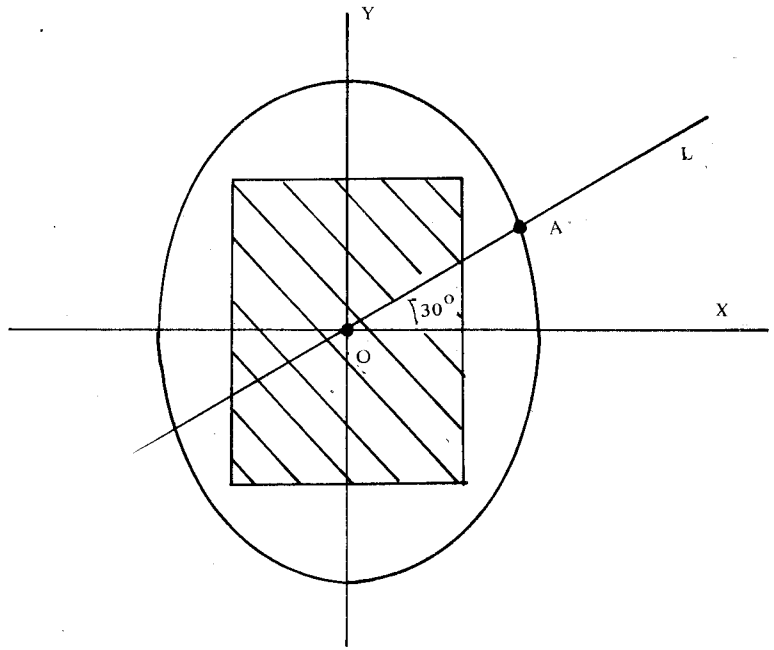
merupakan momen inersia maksimum dan minimum.

Untuk menentukan elips inersianya kita tentukan dulu harga-harga :

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_x}} = \frac{1}{400 cm^2} = 25\ m^{-2}\ ;$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{I_y}} = \frac{1}{300\ cm^2} = 33{,}33\ m^{-2}$$

Dengan menggunakan skala untuk luas penampang 1 cm ~ 10 cm dan skala untuk panjang sumbu elips 1 cm ~ 10 m^{-2}, elips inersia panjang dapat kita gambarkan seperti pada gambar 4.4.A :



gambar 4.4.A

Dengan cara grafik dapat kita ketahui besar momen inersia pribadi penampang tersebut terhadap sembarang garis berat, misalnya garis berat yang membentuk sudut 30^o dengan sumbu X positif, OA = $1/\sqrt{I}$ = 2,6 cm, atau setelah disesuaikan dengan skala yang bersangkutan :

$$\frac{1}{\sqrt{I}} = 2{,}6 \times 10\ m^{-2}, \text{ sehingga}$$

$$I = 0{,}00147928\ m^4 = 147928\ cm^4$$

Jika kita hitung langsung berdasarkan rumus (4.4.2) kita peroleh :

$$I = 160000 \cos^2 30^o + 90000 \sin^2 30^o$$
$$= 142500\ cm^4.$$

Tentu saja, lebih baik kita hitung I dengan rumus (4.4.2) daripada dengan cara grafik, seperti juga kalau kita menghitung momen atau gaya lintang. Elips inersia merupakan suatu gambaran kualitatif tentang besar momen inersia pribadi suatu penampang terhadap garis berat sembarang, sama halnya jika kita gambarkan suatu diagram gaya lintang atau momen lentur.

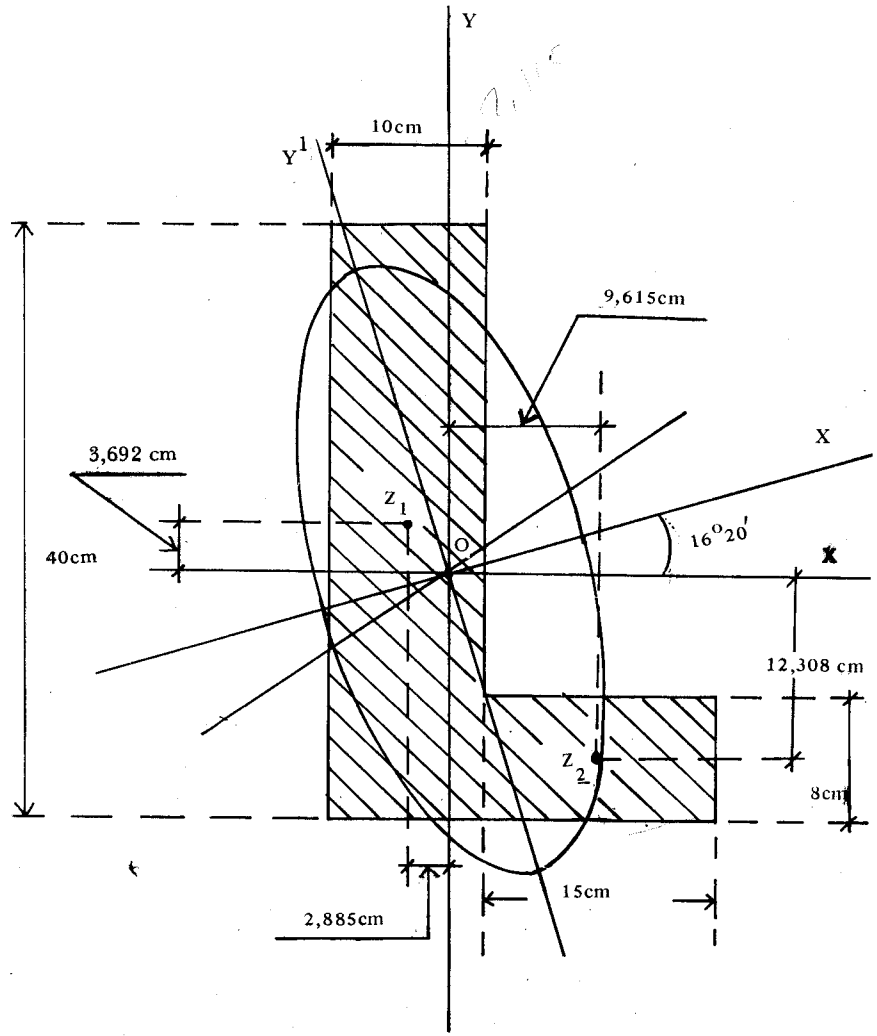
Langkah pertama yang harus kita lakukan tentulah menentukan letak titik beratnya, untuk itu kita bagi F menjadi 2 bagian, yakni F_1 yang luasnya 10 x 40 cm^2 dan F_2 yang luasnya 15 x 8 cm^2.
Jarak titik berat F dari sisi terkirinya adalah :

$$\bar{x} = \frac{(400)(5) + (120)(10 + 7{,}5)}{400 + 120}\ cm = 7{,}885\ cm$$

dan jarak titik berat F dari sisi terbawahnya adalah :

$$\bar{y} = \frac{(400)(20) + (120)(4)}{400 + 120}\ cm = 16{,}308\ cm$$

Contoh 4.4.B : Penampang F berbentuk huruf L (gambar 4.4.B).



Setelah kita ketahui letak titik berat F, kita buat sumbu X sejajar sisi terbawahnya dan sumbu Y sejajar sisi terkirinya, keduanya melalui titik beratnya, titik O. Dengan demikian koordinat titik berat F_1 adalah Z_1 (−2,885; 3,692) dan koordinat titik berat F_2 adalah Z_2 (9,615; −12,308).

Dan besar I_X, I_Y dan S_{XY} kita hitung sebagai berikut :

$$I_X = 1/12(10)(40)^3 + (400)(3,692)^2 + 1/12(15)(8)^3 + 120\ (-12,308)^2$$
$$= 77604,101\ cm^4$$

$$I_Y = 1/12(40)(10)^3 + (400)(-2,885)^2 + 1/12(8)(15)^3 + (120)(9,615)^2$$
$$= 20006,410\ cm^4$$

$$S_{XY} = 0+((400)(3,692)(-2,885)+0+(120)(-12,308)(9,615)$$
$$= -18461,538\ cm^4.$$

Momen inersia pribadi utamanya beserta sumbu inersia pusat utamanya ditentukan sebagai berikut :

Karena $I_X \neq I_Y$, maka sudut α yang dibentuk sumbu inersia pusat utama dengan sumbu X positif ditentukan dengan rumus (4.3.5), yakni :

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2(-18461,538)}{-77604,101+20006,410} = 0,64105$$

$$\alpha = 16^o20'$$

$\sin 2\alpha = 0,53968$, $\cos^2 \alpha = 0,92094$, $\sin^2 \alpha = 0,07907$

Dengan rumus (4.3.11) kita hitung :

$$I_1 = (77604,101)(0,92094) + (20006,41)(0,070907) - (-18461,538)(0,53968)$$
$$= 83013,949\ cm^4.$$

Dan dengan rumus (4.3.12) kita hitung :

$$I_2 = 77604,101 + 20006,41 - 83013,949$$
$$= 14596,562\ cm^4.$$

Jadi I_1 adalah momen inersia pribadi maksimum dan I_2 adalah momen inersia minimum. Apabila sumbu inersia pusat utama yang bersudut 16° 20' dengan sumbu X positif kita jadikan sumbu X' dan sumbu inersia pusat utama yang bersudut 106° 20' dengan sumbu X positif kita jadikan sumbu Y', maka tentulah :

$I_{X'} = I_1 = 83013,949\ cm^4$ dan $I_{Y'} = I_2 = 14596,562\ cm^4$ dan $S_{XY} = 0$.

Elips inersia dapat ditentukan sebagai berikut :

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_{X'}}} = 0,003471\ cm^{-2} = 34,71\ m^{-2}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{I_{Y'}}} = 0,008277\ cm^{-2} = 82,77\ m^{-2}$$

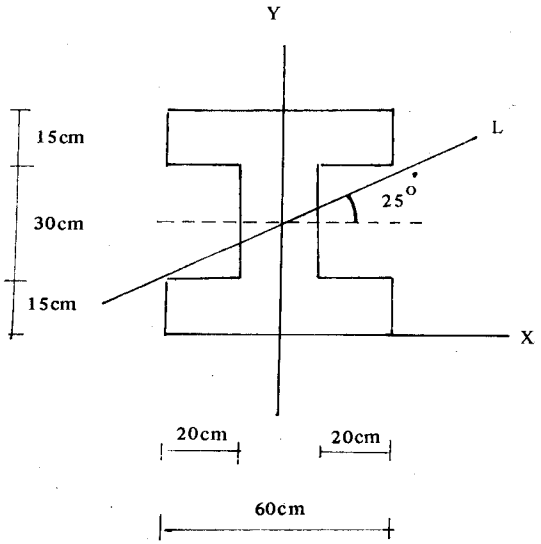
Dengan mengambil skala panjang untuk penampang F : 1 cm ∿ 5 cm dan skala untuk panjang sumbu elips : 1 cm ∿ 20 m^{-2}, elips inersianya kita gambar pada gambar 4.4.B.

Catatan :

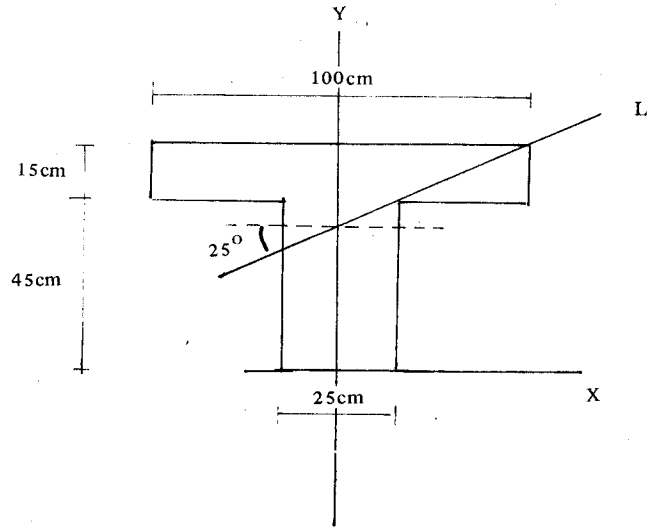
Besar momen inersia pribadi terhadap sembarang garis berat dapat kita "rasakan" dari gambar 4.4.A atau 4.4.B, dan pula perubahan besar momen inersia dari sumbu inersia pusat utama yangsatu (sumbu X') dan sumbu inersia pusat utama lainnya (sumbu Y'). Untuk mengetahui momen inersia terhadap garisberat OA, A terletak pada lengkungan elips, kita tinggal mengukur panjang sinar OA. Semakin *pendek* OA semakin *besar*lah momen inersia terhadap garis OA, karena panjang OA berbanding terbalik dengan akar momen inersianya.

4.4.SL SOAL LATIHAN

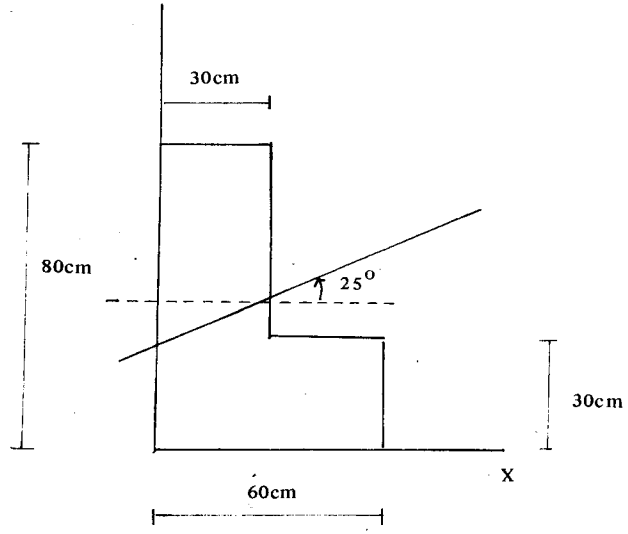
1. Tentukanlah momen inersia dan momen sentrifugal terhadap sumbu X dan sumbu Y masing-masing penampang dalam gambar A, B, C, D, E, F dan G dan tentukan pula dengan cara grafik momen inersia masing-masing penampang tersebut terhadap sumbu L yang melalui titik berat penampang membentuk sudut 25^o dengangaris horisontal dan bandingkanlah hasilnya dengan hasil cara analitik.



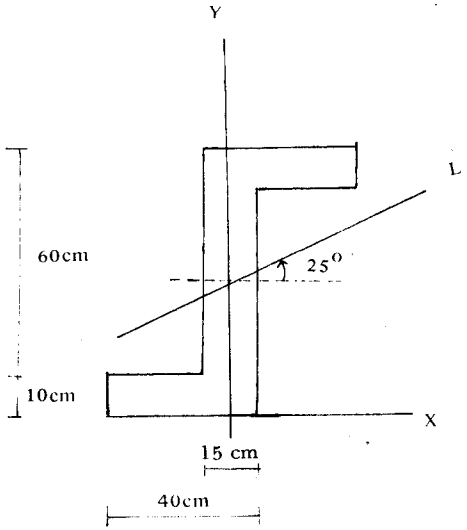
Gambar A



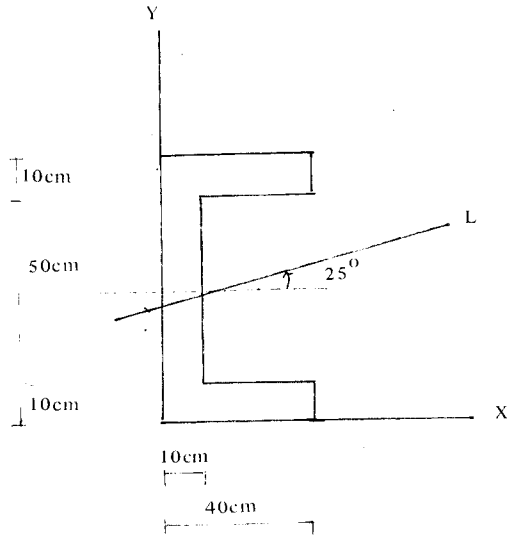
Gambar B



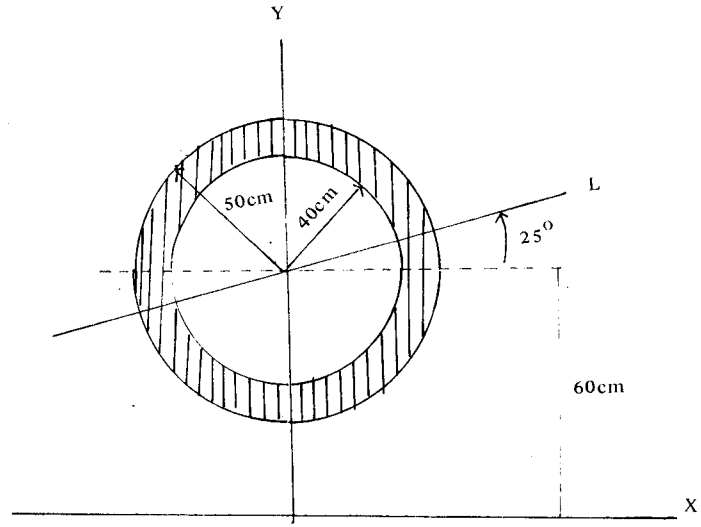
Gambar C



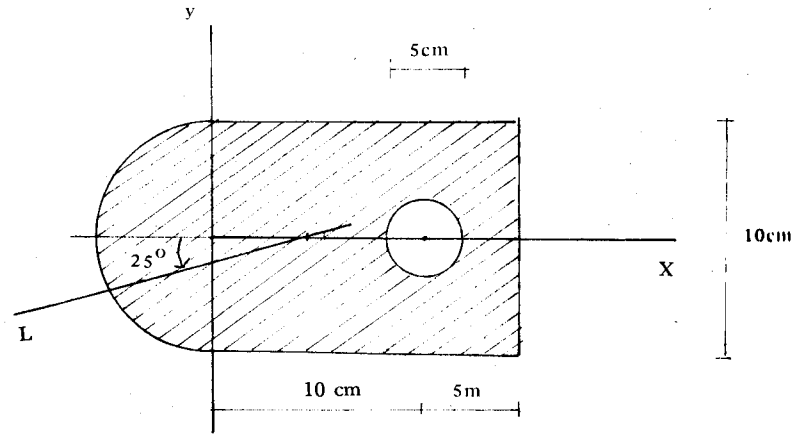
Gambar D



Gambar E

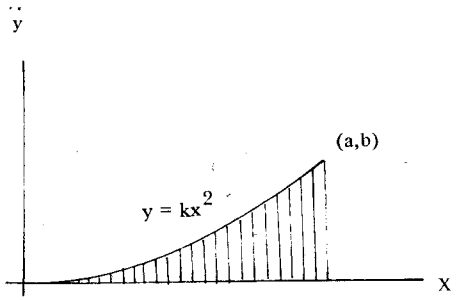


Gambar F



Gambar G

2. Tentukanlah momen inersia dan momen sentrifugal penampang yang diarsir dalam gambar H terhadap sumbu X dan Y, dan tentukan pula momen inersia pribadi utamanya dan ellips inersianya.



Gambar H

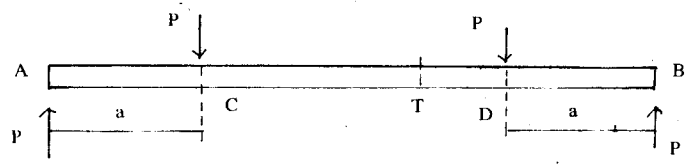
BAB V
TEGANGAN DI DALAM BALOK

Di dalam bab II telah kita bahas tentang keharusan adanya gaya-dalam (Gaya normal, gaya lintang dan momen lentur) untuk menjamin terjadinya kesetimbangan pada setiap raga-lepas yang kita tinjau. Bagaimana gaya-dalam tersebut timbul dan apa pengaruhnya terhadap kekuatan balok yang bersangkutan akan kita bahas pada bab ini.

Pertama akan kita bahas tentang timbulnya tegangan pada penampang-tegak balok akibat momen lentur, dan berikutnya akibat gaya-lintang. Pengertian tentang hal ini bukan saja penting untuk mengukur kekokohan suatu balok dalam menanggulangi beban yang dipikulnya, tetapi sekaligus juga akan menjelaskan bagaimana timbulnya gaya-gaya-dalam tersebut (gaya lintang dan momen lentur)*.

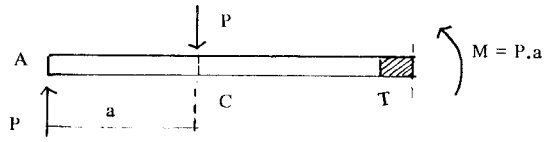
5.1. Tegangan pada balok akibat momen lentur :

Tinjaulah balok AB yang dibebani seperti terlihat pada gambar 5.1.1, berat balok diabaikan. Pada bagian CD, balok tersebut hanya menderita momen lentur sebesar P a dan tidak ada gaya-dalam lain pada bagian tersebut; kita katakan bagian CD menderita lenturan *murni*. Hal ini jelas terlihat bila kita tinjau raga-lepas AT, dengan T sembarang titik pada CD (gambar 5.1.2).



gambar 5.1.1

* Tentang tegangan akibat gaya normal, lihat Bab I.

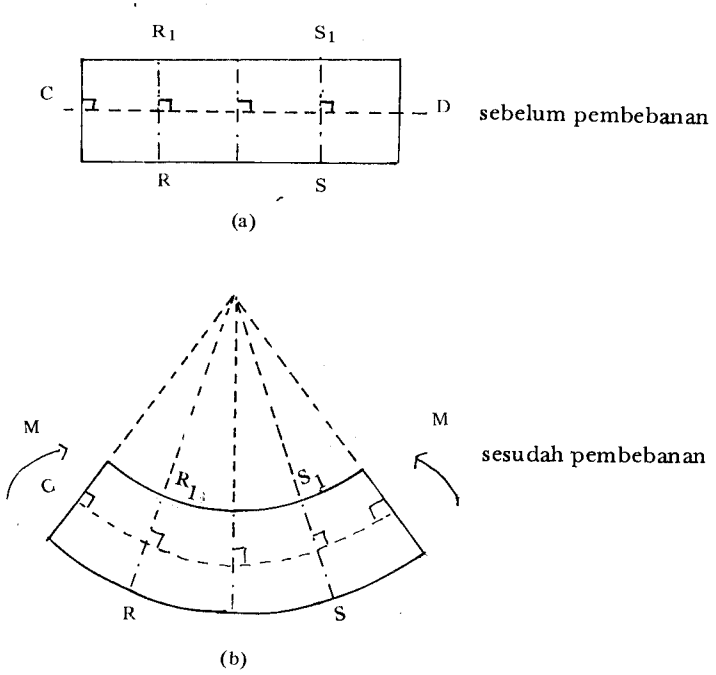


gambar 5.1.2

Pada raga-lepas AT ini gaya vertikal P di C telah diimbangi oleh reaksi tumpuan di A, juga sebesar P, sehingga agar raga-lepas AT setimbang hanya diperlukan momen M = P a yang berlawanan arah dengan momen akibat kedua gaya vertikal tersebut, yang kita sebut sebagai momen-lentur dan bekerja pada penampang-tegak balok yang melalui T. Selanjutnya marilah kita lihat bagaimana momen-lentur M itu bekerja.

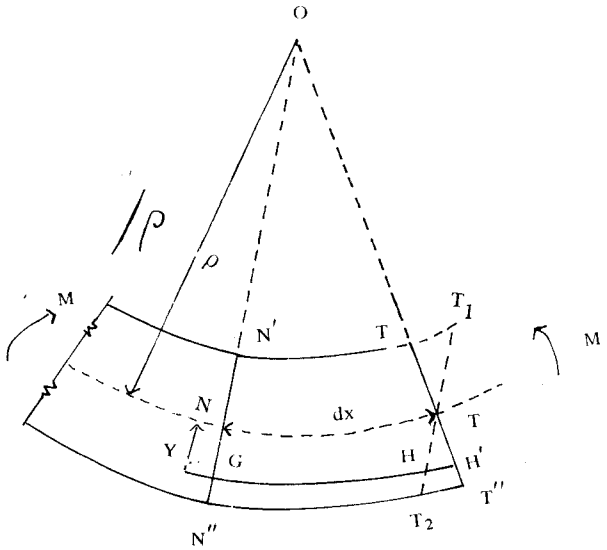
Andaikan bahwa balok AB bersifat prismatik, homogen dan taat pada hukum Hooke. Jika penampang-tegak balok AB juga berbentuk empat persegi panjang, *percobaan-langsung menunjukkan bahwa,* dua buah garis *lurus* vertikal yang kita tera pada balok sebelum pembebanan berlangsung (garis $R_1 R$ dan $S_1 S$ pada gambar 5.1.3) akan tetap *lurus* setelah balok dibebani.

Berdasarkan kenyataan tersebut, kita buatlah pengandaian yang mendasari teori yang akan kita turunkan berikut ini, yakni : Penampang-penampang yang tadinya *rata* dan *tegak lurus* sumbu balok sebelum pembebanan berlangsung (penampang tegak balok melalui $R_1 R$ dalam gambar 5.1.3 (a), misalnya) akan tetap *rata* dan *tegak lurus* sumbu balok setelah pembebanan berlangsung (gambar 5.1.3 [b]). Dan dari percobaan kita dapatkan kenyataan bahwa teori yang diturunkan berdasarkan andaian tersebut memberikan hasil yang sesuai dengan hasil percobaan.



gambar 5.1.3

Perhatikanlah bagian balok selebar dx dari T (bagian yang diarsir dalam gambar 5.1.2), yang telah "diperbesar" dalam gambar 5.1.4. Akibat pengandaian tersebut di atas, gejala pertama yang segera jelas bagi kita adalah memendeknya serat membujur pada tepi atas balok dan memanjangnya serat membujur pada tepi bawah balok, dan di samping itu ada pula suatu "lapisan" serat membujur di antara kedua lapisan tersebut yang tidak berubah panjangnya. Lapisan yang tidak berubah panjangnya ini kita sebut sebagai *bidang netral* (bidang melalui garis NT dalam gambar 5.1.4).



gambar 5.1.4

Anggaplah bahwa setelah beban bekerja bagian arsiran pada gambar 5.1.2 menjadi bagian N'T'N''T'' dalam gambar 5.1.4. Kemudian akan kita selidiki berapa besar strain yang terjadi pada serat sejauh y dari bidang netral. Untuk itu tariklah garis $T_1 T_2$ sejajar N'N'' melalui titik T, karena panjang NT (pada bidang netral) tetap dx dan dapat kita jadikan patokan untuk mengukur perubahan panjang yang terjadi akibat tambahan panjang serat tersebut. Dengan demikian, dapatlah kita katakan bahwa serat sejauh y dari bidang netral yang panjangnya semula GH (= dx) menjadi GH' setelah pembebanan berlangsung. Atau, strain yang terjadi adalah :

$$\epsilon_y = \frac{HH'}{dx} \qquad (5.1.1)$$

Selanjutnya, jika jejari kelengkungan bidang netralnya kita sebut ρ, maka dari sifat kesebangunan antara segitiga ONT dengan THH' kita peroleh :

$$\frac{HH'}{dx} = \frac{y}{\rho} \qquad (5.1.2)$$

Pergantian (5.1.2) ke dalam (5.1.1) menghasilkan :

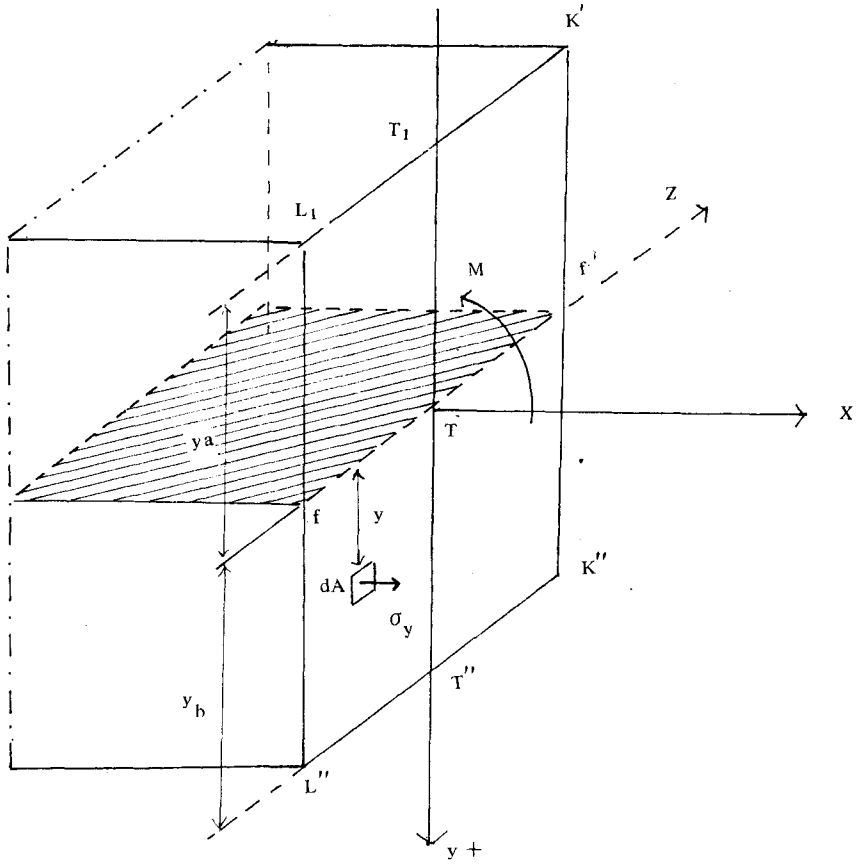
$$\epsilon_y = \frac{y}{\rho} \qquad (5.1.3)$$

Jika tegangan yang berhubungan dengan strain ϵy tersebut kita namakan σ_y, dan balok taat pada hukum Hooke, maka tentulah $\sigma_y = E\,\epsilon_y$; tetapi menurut (5.1.5) $\epsilon y = y/\rho$, alhasil kita peroleh :

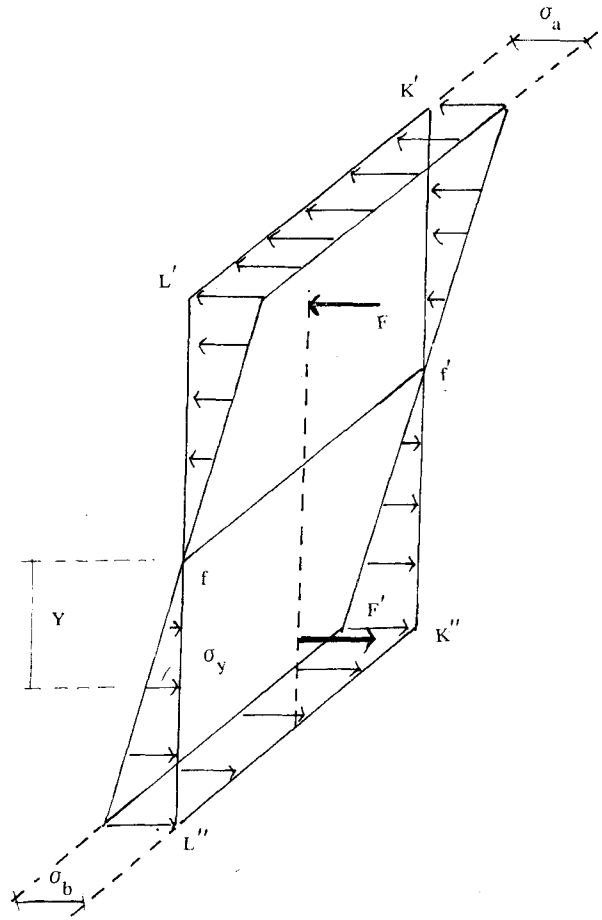
$$\sigma_y = \frac{E}{\rho} y \qquad (5.1.4)$$

Tentu saja, tinjauan terhadap serat-serat membujur di atas bidang netral akan memberikan hasil yang serupa, perbedaannya hanyalah pada sifat tegangan yang bersangkutan. Pada serat membujur di bagian atas bidang netral yang mengalami perpendekan, tegangannya bersifat menekan dan sebaliknya pada bagian bawah bidang netral, yang seratnya mengalami perpanjangan, tegangannya bersifat menarik.

Kembali ke persamaan (5.1.4), kita dapati bahwa tegangan yang terjadi pada serat-serat membujur balok yang mengalami lenturan murni ternyata *berbanding lurus* dengan jarak serat yang bersangkutan ke bidang netral balok (y). Kenyataan ini kemudian kita gambarkan dalam bentuk diagram tegangan pada penampang yang bersangkutan (gambar 5.1.5).



(a) Penampang balok yang mengalami momen lentur sebesar M.



b) Diagram tegangan pada penampang balok yang mengalami momen lentur M

F' = Resultan gaya akibat tegangan tekan
F = Resultan gaya akibat tegangan tarik

Bidang yang diarsir pada gambar 5.1.5 adalah bidang netral, sedangkan perpotongan bidang netral dengan penampang tegak balok (garis ff') kita sebut garis netral. Dan letak garis netral tersebut akan kita tentukan dengan cara berikut:

Misalkan suatu elemen luas penampang dA terletak pada jarak y dari garis netral (gambar 5.1.5[a]). Maka elemen gaya yang bekerja pada elemen luas tersebut, adalah $\sigma_y dA$. Gunakan (5.1.4), kita peroleh :

$$\sigma_y \, dA = \frac{E}{\rho} y \, dA$$

Dan karena gaya-dalam aksial tidak terdapat pada penampang yang bersangkutan (lenturan murni), maka :

$$\int_A \sigma_y \, dA = o$$

$$\frac{E}{\rho} \int_A y \, dA = 0$$

Karena $\frac{E}{\rho} \neq 0$, kita simpulkan bahwa :

$$\int_A y \, dA = A \, y_t = 0,$$

dengan :

A = luas penampang seluruhnya.

y_t = jarak titik berat penampang ke garis netral.

Alhasil, karena $A \neq 0$, kita simpulkan bahwa $y_t = 0$, atau, *garis netral* melalui titik berat penampang yang bersangkutan.*

* Meskipun letak bidang netral juga mudah ditentukan karena letak garis netral sudah kita ketahui, tetapi dalam kenyataannya garis netral inilah yang akan kita jadikan patokan, sebab pada akhirnya yang akan kita tinjau adalah kekokohan balok pada penampang tegaknya.

Kemudian kita lihat lebih lanjut, meskipun tegangan-tegangan tersebut tidak boleh mengakibatkan terjadinya gaya-dalam aksial (lenturan murni), tetapi mereka harus *menghasilkan momen* untuk mengimbangi momen luar sebesar M** (akibat gaya-gaya luar). Oleh karena itu, jika kita jumlahkan semua momen yang dihasilkan oleh tegangan-tegangan yang terjadi pada penampang tegak balok melalui T, kita peroleh :

$$M = \int_A y \, \sigma_y \, dA \qquad (5.1.5)$$

Pergantian (5.1.4) ke dalam (5.1.5) menghasilkan :

$$M = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \, dA \qquad (5.1.6)$$

Nah, besaran $I_z = \int_A y^2 \, dA$ inilah yang kita sebut sebagai momen inersia penampang tegak balok terhadap garis netralnya, sejajar sumbu Z, yang tidak asing lagi bagi kita karena telah kita bahas pada bab IV. Dengan demikian rumus (5.1.6) dapat kita tulis sebagai berikut :

$$M = \frac{E}{\rho} I_z$$

atau

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \, I_z} \qquad (5.1.7)$$

Beberapa kesimpulan penting dapat kita tarik dari (5.1.7) yakni :

i) Semakin besar M, semakin kecillah ρ, atau semakin besar juga faktor $1/\rho$. Artinya, semakin besar M semakin

** Dalam contoh ini, M = Pa. Lihat raga-lepas AT.

"hebat"lah lenturan yang terjadi (karena jejari kelengkungan balok (ρ) di titik yang bersangkutan kecil). Demi kemudahan, faktor $1/\rho$ kita sebut sebagai *derajat kelengkungan balok,* sehingga dapat juga kita katakan bahwa semakin besar M semakin besarlah derajat kelengkungannya.

ii) Sebaliknya, faktor EI berbanding terbalik dengan derajat kelengkungannya. Dengan kata lain, semakin besar faktor EI balok yang bersangkutan, semakin kecillah derajat kelengkungannya atau semakin berkuranglah lenturannya. Oleh karena itu, faktor EI tersebut kita namakan secara khusus sebagai *faktor kekakuan balok terhadap momen lentur,* jika faktor EI semakin besar kita katakan balok semakin kaku, logis toh ! (Lihat kembali penjelasan awal di dalam Bab IV).

iii) Dari bab IV juga kita tahu bahwa besarnya I_z sangat bergantung pada bentuk penampang serta kedudukan penampang terhadap garis beratnya (garis netralnya), sehingga mudah dimengerti bahwa cara meletakkan balok juga berpengaruh terhadap lenturan yang terjadi.

Selanjutnyā, gantilah harga $1/\rho$ dari (5.1.7) ke dalam (5.1.4), maka kita peroleh :

$$\sigma_y = \frac{M\,y}{I_z} \qquad (5.1.8)$$

Dan, karena harga M pada penampang *tertentu* tetap besarnya, demikian pulá harga I_z, maka mudah disimpulkan bahwa tegangan maksimum akan terjadi pada serat terjauh dari garis netral (y terbesar). Dalam contoh ini, tegangan *tarik* terbesar terjadi pada tepi *bawah* balok sedangkan tegangan *tekan* terbesar terjadi pada tepi *atas* balok.

Berhubung harga I_z selalu positif, maka untuk mengawetkan perjanjian tanda yang telah kita sepakati semula,

yakni tanda positif untuk tegangan tarik dan negatif untuk tegangan tekan, maka harga y *positif* kita gunakan untuk bagian penampang di sebelah *bawah* garis netral, dan sebaliknya harga y negatif untuk bagian penampang di sebelah *atas* garis netral. Sedangkan tanda untuk M tetap seperti yang telah ditentukan pada bab II (dalam contoh kita ini harga M bertanda positif, sehingga pada bagian bawah garis netral, karena y kita beri nilai positif, tegangan yang terjadi akan bernilai positif pula, karena di bagian itu terjadi tegangan tarik).

Selanjutnya, kalau jarak garis netral penampang ke tepi atas balok kita nyatakan dengan y_a dan jarak netral penampang ke tepi bawah penampang kita nyatakan dengan y_b, kita dapatkan tegangan-tegangan ekstrim pada penampang yang bersangkutan sebagai berikut :

Tegangantarik maksimum :

$$\sigma^+_{maks} = \sigma_b = \frac{M\,y_b}{I_z} \qquad (5.1.9)$$

Tegangan tekan maksimum :

$$\sigma^-_{maks} = \sigma_a = \frac{M\,y_a}{I_z} \qquad (5.1.10)$$

Di samping itu kita kenal juga istilah *Modulus Penampang* yang didefinisikan sebagai berikut :

$$W_a = \frac{I_z}{y_a} \quad \text{dan} \quad W_b = \frac{I_z}{y_b}$$

sehingga rumus (5.1.9) dan (5.1.10) menjadi :

$$\sigma^{+}_{maks} = \sigma_b = \frac{M}{W_b} \qquad (5.1.11)$$

$$\sigma^{-}_{maks} = \sigma_a = \frac{M}{W_a} \qquad (5.1.12)$$

Catatan :

1. Tafsiran geometrik :

   Jika kita jumlahkan gaya-gaya akibat tegangan tekan yang terjadi pada bagian penampang sebelah atas garis netral (gambar 5.1.5[b]), akan kita peroleh gaya resultan sebesar :

   $$F = \int_{A_a} \sigma_y \, dA$$

   dengan :

   A_a = luas penampang sebelah atas garis netral. Dengan demikian, F dapat ditafsirkan sebagai ISI benda tegangan yang dalam hal ini berbentuk prisma tegak (karena σ_y fungsi liner terhadap y), yang alasnya berbentuk segitiga dan tingginya sama dengan lebar penampang tegak balok. Sebutlah lebar balok sebagai b, alhasil kita peroleh :

   $$F = \left(\frac{\sigma_a \, y_a}{2}\right) b \qquad (5.1.13)$$

   Dengan jalan serupa dapat kita tentukan besarnya F' sebagai isi benda tegangan tarik, yakni :

   $$F' = \left(\frac{\sigma_b \, y_b}{2}\right) b \qquad (5.1.14)$$

Arah F ke kiri dan arah F' ke kanan, masing-masing bekerja pada sumbu Y dan berjarak $2(y_a)/3$ dan $2(y_b)/3$ dari garis netral (benda tegangan berbentuk prisma), sehingga terhadap garis netral, keduanya akan menghasilkan momen sebesar :

$$M = \frac{2F \, y_a}{3} + \frac{2F' \, y_b}{3} \qquad (5.1.15)$$

Gantilah F dan F' dengan rumus (5.1.13) dan (5.1.14), maka

$$M = \frac{b}{3}(\sigma_a \, y_a^2 + \sigma_b \, y_b^2) \qquad (5.1.16)$$

Jika penampang balok berukuran b x h, maka $y_a = y_b = h/2$, dan $\sigma_a = \sigma_b = \sigma$, dan (5.1.16) menjadi :

$$M = \frac{bh^2}{6}\sigma$$

atau

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} \qquad (5.1.17)$$

Rumus (5.1.17) ini akan sangat berguna dalam penentuan batas momen (M) yang dapat dipikul oleh suatu balok berpenampang tegak bxh, jika tegangan tarik dan tekan yang diijinkan besarnya, yakni $\bar{\sigma}$.

Lebih jauh lagi, *proses* penafsiran geometrik yang baru saja kita bahas akan sangat bermanfaat, dan oleh karena itu sering digunakan dalam perhitungan konstruksi beton maupun perhitungan konstruksi lainnya. Jadi, meskipun hasil yang sama dapat dicapai dengan mengandalkan rumus-rumus yang lebih bersifat umum dan tanpa melalui tafsiran geometrik seperti yang baru saja kita lakukan, namun pemahaman proses tersebut sangat penting !

2. Semua teori yangbaru saja kita bahas hanya diperuntukkan bagi masalah lenturan murni; artinya, tegangan yang kita tinjau hanyalah tegangan akibat momen murni saja tanpa memperhitungkan kemungkinan adanya gaya-dalam lainnya.

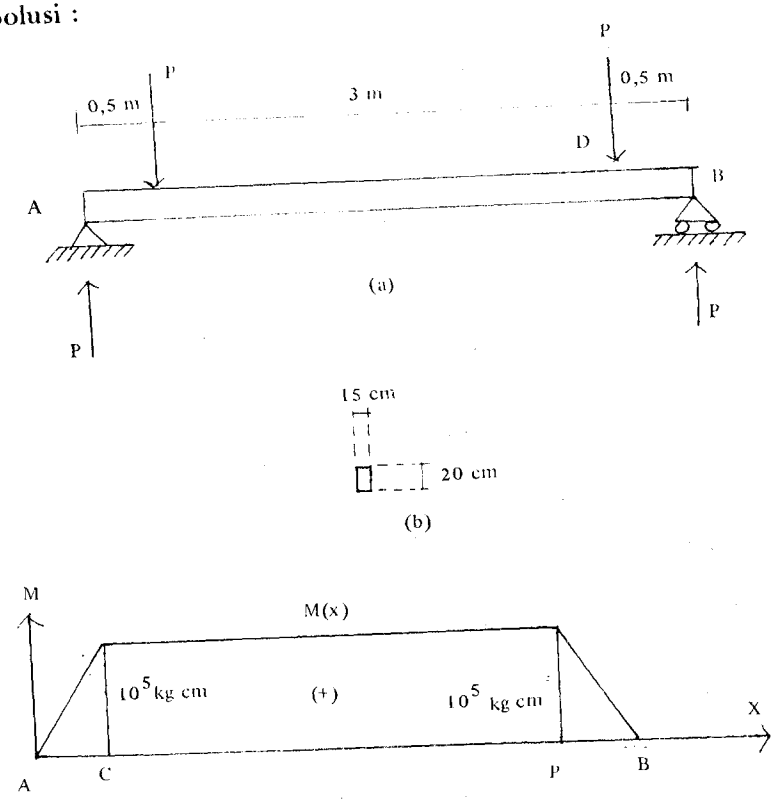
Tentu saja, dalam kenyataannya hampir selalu ada gaya-lintang dan atau gaya normal yang "turut campur", dan penampang balok tidak selalu empat persegi panjang, bahkan tidak selalu simetrik terhadap garis beratnya (misalnya balok berpenampang ½ lingkaran atau bentuk huruf T). Namun demikian, percobaan-percobaan menunjukkan bahwa rumus yang baru saja kita turunkan tetap berlaku, artinya, perhitungan tegangan akibat momen boleh kita pisahkan tersendiri, dan perhitungan tegangan akibat gaya normal atau gaya lintang kita lakukan secara tersendiri pula; Demikian pula untuk bentuk penampang yang bukan empat persegi panjang, rumus tersebut juga berlaku.

Contoh 5.1.A : Penentuan tegangan maksimum akibat momen lentur.

Balon prismatik AB di atas tumpuan sendi dan rol (gambar 5.1.A.1.a), memikul beban terpusat P = 2000 kg di titik C dan D. Panjang balok = 4 m, titik C terletak pada jarak 0,5 m dari A; sedangkan titik D terletak pada jarak 0,5 m dari B. Ukuran penampang balok adalah 15 x 20 cm^2 (gambar 5.A.1.b). Berapakah tegangan maksimum yang terjadi pada balok bagian CD, jika berat balok AB diabaikan ?

Balok bagian CD mengalami lenturan murni, dengan M = 10^5 kg cm, bekerja di setiap penampang pada balok bagian CD tersebut.
Diagram tegangan (akibat momen lentur) untuk setiap penampang pada balok bagian CD terlihat dalam gambar 5.1.A.2.b ; sedangkan gambar 5.1.A.2.a menunjukkan penampang sembarang pada balok bagian CD yang mengalami

Solusi :



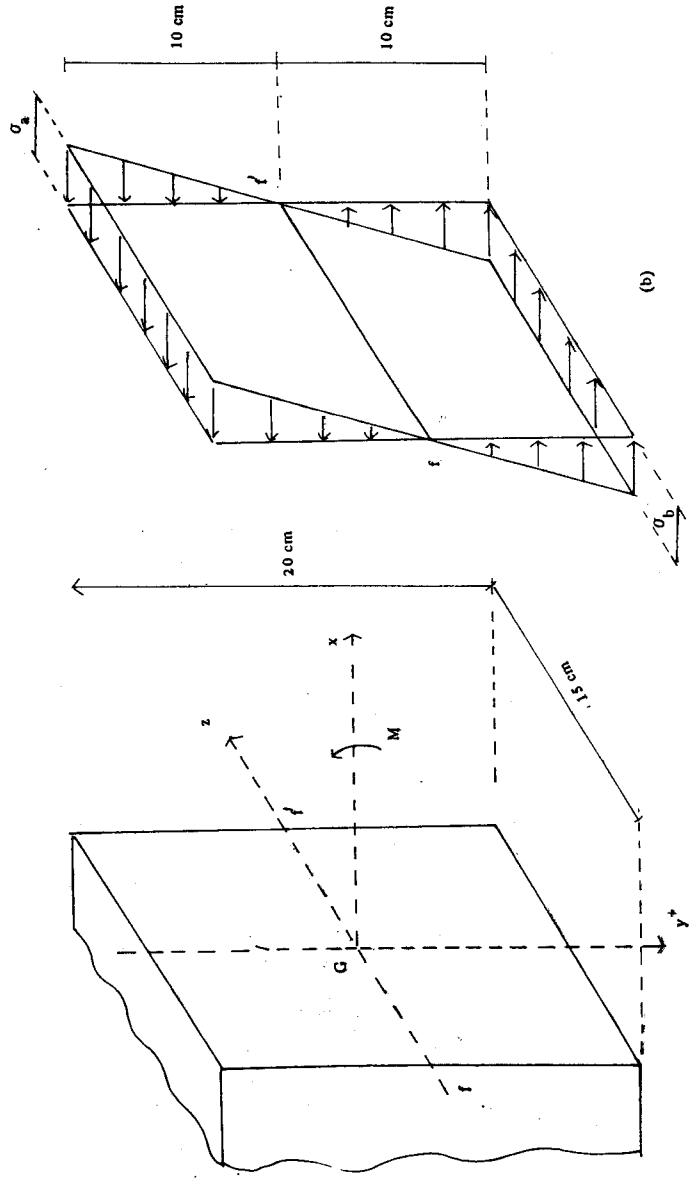
c) Diagram momen lentur.

gambar 5.1.A1.

momen lentur sebesar M = 10^5 kgcm.. Sumbu Z pada penampang menunjukkan garis netral, yang melalui titik berat penampang yang bersangkutan. Sehingga :

$I_z = \frac{1}{12}(15)(20)^3 = 10^4\ cm^4$ (lihat contoh 4.2.a)

$y_a = -10$ cm dan $y_b = +10$ cm.



Gambar 5.1.A.2

Dan menurut 5.1.9 serta 5.1.10 :

Tegangan tarik maksimum,

$$\sigma^{+}_{maks} = \frac{M\, y_b}{I_z} = 100 \text{ kg/cm}^2$$

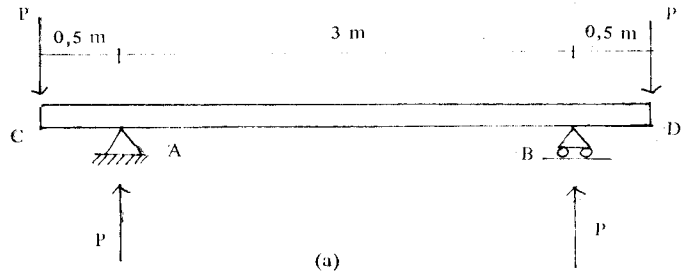
Tegangan tekan maksimum,

$$\sigma^{-}_{maks} = \frac{M\, y_a}{I_z} = -100 \text{ kg/cm}^2$$

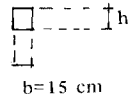
Persoalan tersebut dapat diselesaikan dengan rumus (5.1.17) (bandingkan kedua proses tersebut) :

$$\sigma = \frac{(6)(10^5)}{(15)(20)^2} \text{ kg/cm}^2 = 100 \text{ kg/cm}^2$$

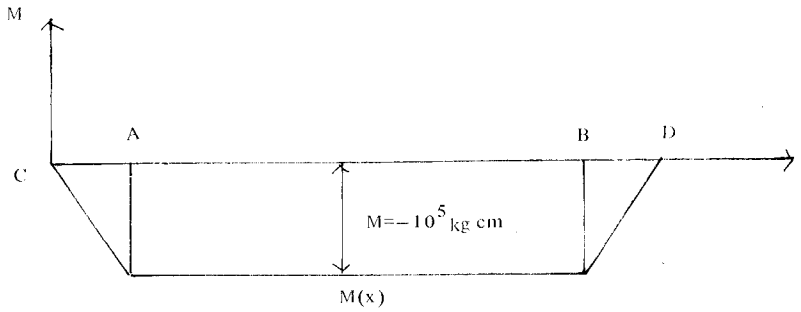
Contoh 5.1.B : Penentuan dimensi balok.



(a)



(b)



c) Diagram momen lentur

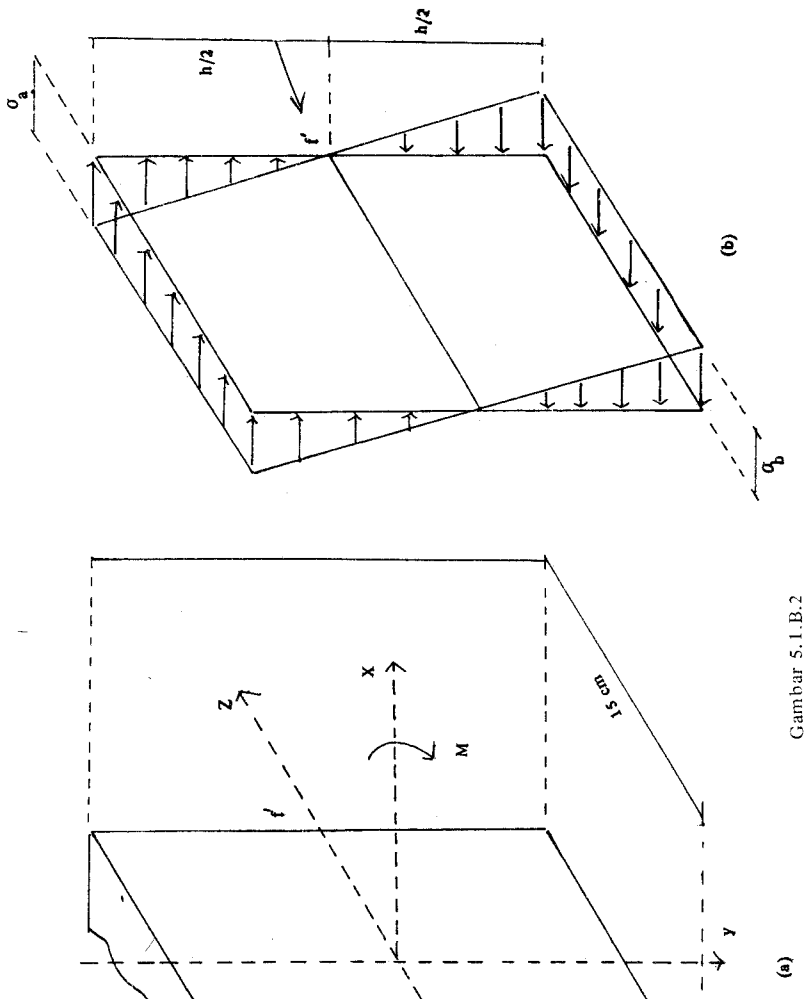
Gambar 5.1.B.1

Balok CABD di atas tumpuan sendi A dan rol B (gambar 5.1.B.1.a), dirancangkan untuk memikul beban terpusat P = 2000 kg yang akan bekerja di C dan D. Panjang CA = BD = 0,5 m, AB = 3 m. Penampang balok, ditentukan berbentuk empat persegi panjang, dan lebarnya adalah b = 15 cm (gambar 5.2.B.1b). Balok yang akan digunakan terbuat dari kayu, dan tegangan (akibat momen lentur) yang diijinkan terjadi pada balok kayu tersebut adakan $\bar{\sigma}_k$ = 85 kg/cm^2. Berapakah tebal balok (h) minimum, agar syarat kekokohan yang diberikan terpenuhi? (Berat balok diabaikan).

Momen lentur maksimum terjadi pada setiap penampang pada balok bagian AB, yakni sebesar $M_1 = -10^5$ kgcm (momen negatif maksimum).

Garis netral ff' melalui titik berat penampang, karenanya :
$I_z = 1/12(15)h^3 = 1{,}25\ h^3$; $y_a = -0{,}5\ h$ dan $y_b = 0{,}5\ h$.

$|y_a| = y_b$, menyebabkan $\sigma_a = |\sigma_b|$ (lihat gambar 5.1.B.2b)



Gambar 5.1.B.2

Solusi :

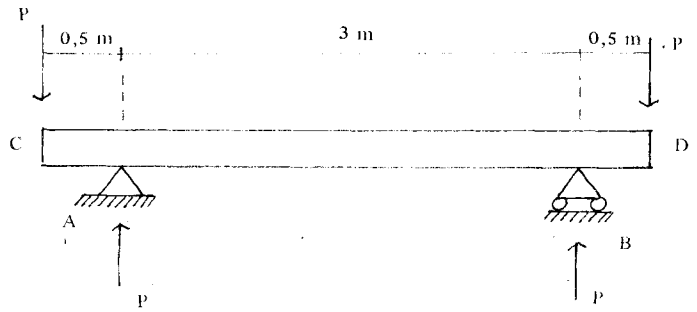
$\sigma_a = |\sigma_b| = \dfrac{10^5\,(0{,}5\ h)}{1{,}25\ h^3}$ dan harus $\leqslant \bar{\sigma}_k = 85$ kg/cm^2 (syarat kekokohan yang diberikan), sehingga $h \geqslant 21{,}69$ cm.

Dengan rumus (5.1.17) kita peroleh hasil yang sama, yakni :

$$\sigma = \frac{(6)(10)^5}{(15)\ h^2} \leqslant 85, \text{ atau } h \geqslant 21{,}69 \text{ cm.}$$

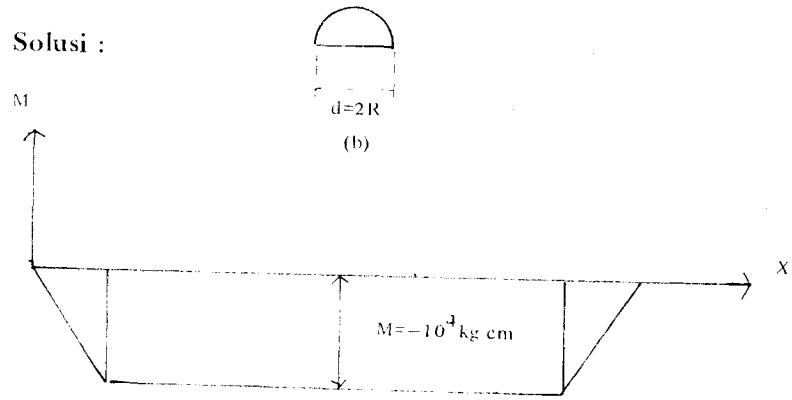
Contoh 5.1.C : Penampang balok berbentuk setengah lingkaran.

Balok kayu CABD yang prismatik, terletak di atas tumpuan sendi A dan rol B (gambar 5.1.C.1.a), dan harus memikul dua beban terpusat yang sama besarnya, P = 200 kg, di titik C dan D. Titik C terletak pada ujung kiri balok, CA = 0,5 m; sedangkan titik D terletak di ujung kanan balok, BD = 0,5 m. Panjang balok CABD = 4m. Tegangan akibat momen lentur yang diijinkan terjadi pada balok kayu tersebut, adalah $\bar{\sigma}_k = 100$ kg/cm^2. Jika penampang balok yang digunakan itu berbentuk setengah lingkaran (gambar 5.1.C.1.b), dan berat balok sendiri kita abaikan, berapakah diameter minimum penampang balok tersebut agar syarat kekokohan yang diberikan terpenuhi?



(a)

Solusi :

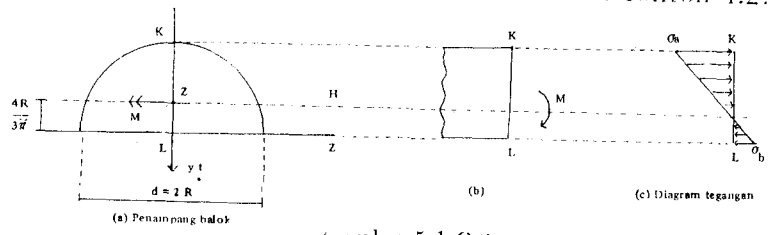


(c) Diagram momen lentur

Gambar 5.1.C.1

Momen lentur maksimum terjadi di setiap penampang balok bagian AB (lihat diagram momen lentur dalam gambar 5.1.C.1c), yakni $M = -10^4$ kgcm.

Diameter lingkaran kita nyatakan dengan d, jari-jarinya R. Kemudian, lihat gambar 5.1.C.2.a dan contoh 4.2.E.



Gambar 5.1.C.2

$I_Z^* = 0{,}1098\ R^4$; $y_a = -(R - \dfrac{4R}{3\pi})$ dan $y_b = +\dfrac{4R}{3\pi}$

σ_a pasti $> |\sigma_b|$, karena $|y_a| > y_b$.

Maka tegangan maksimum terjadi pada tepi atas balok, sebesar :

$$\sigma_a = \frac{M\ y_a}{I_Z^*} = \frac{10^4\,(R - \dfrac{4R}{3\pi})}{0{,}1098\ R^4}$$

Agar syarat kekokohan yang diberikan terpenuhi, maka

$$\sigma_a \leqslant \bar{\sigma}_k = 100 \text{ kg/cm}^2,$$

jadi

$$R \geqslant 8{,}062 \text{ cm}$$
$$d \geqslant 16{,}124 \text{ cm}$$

Contoh 5.1.D : Beban maksimum yang dapat dipikul.

Jika diameter penampang balok CABD dalam contoh 5.C di atas kita ambil sebesar d = 20 cm, berapakah P maksimum — yang akan bekerja serentak di titik C dan D — yang dapat dipikul balok tersebut ?

Solusi :

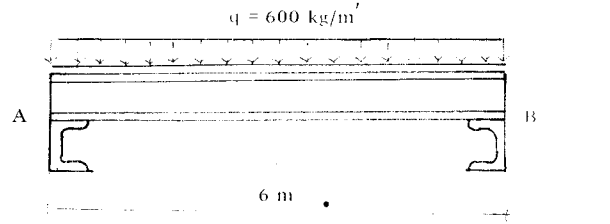
Momen lentur maksimum terjadi di setiap penampang balok antara A dan B, yakni M = — P (50 cm). Sebagai pembanding, lihatlah diagram momen lentur dalam gambar 5.1.C.1.c. Tegangan maksimum balok menjadi

$$\sigma_a = \frac{50\,P(10 - \frac{40}{3\pi})}{0{,}1098\,(10^4)}$$

Dan σ_a, harus $\leqslant \bar{\sigma}_k = 100$ kg/cm^2 ; maka P $\leqslant$ 381,52 kg.

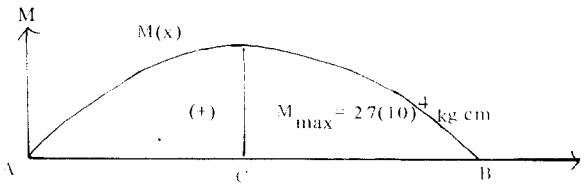
Contoh 5.1.F : Penentuan profil baja.

Balok baja I di atas dua tumpuan (gambar 6.F.1.a), panjangnya 6 m serta harus memikul beban terbagi rata sebesar q = 600 kg/m'. Tegangan batas baja yang diijinkan terjadi, $\bar{\sigma}_{baja} = 1400$ kg/cm^2.
Tentukanlah profil baja yang harus dipakai, agar syarat kekokohan yang diberikan terpenuhi. (Berat balok diabaikan).



(a)

(b)



(c) Diagram momen lentur

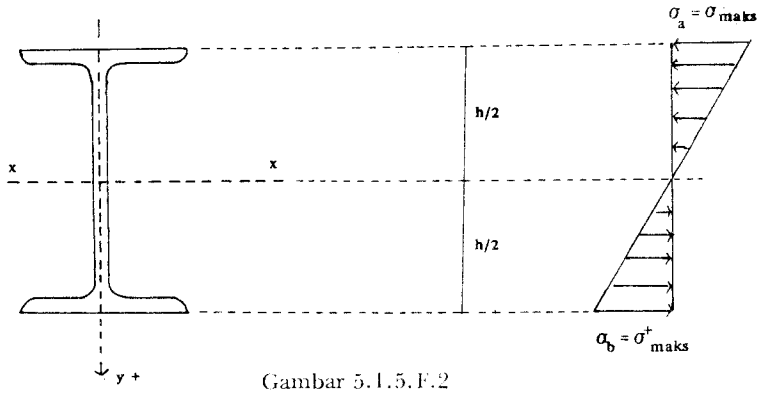
Gambar 5.1.5.F.1

Solusi :

Momen maksimum terjadi di C, tengah-tengah bentang:

$$M_{maks} = \frac{(600)(600)^2}{8} \text{ kgcm}$$

$$= 27(10^4) \text{ kgcm}.$$



Gambar 5.1.5.F.2

(a) Penampang profil I (b) Diagram tegangan

Tegangan tarik maksimum, terjadi di serat bawah pada penampang C :

$$\sigma_b = \sigma^+_{maks} = \frac{M_{maks}\ y_b}{I_x} = \frac{M_{maks}}{W_b}$$

dengan

$$W_b = \frac{I_x}{y_b}$$

Tegangan tekan maksimum, terjadi di serat atas pada penampang C :

$$\sigma_a = \sigma^-_{maks} = \frac{M_{maks}\ y_a}{I_x} = \frac{M_{maks}}{W_a}$$

dengan

$$W_a = \frac{I_x}{y_a}$$

Tapi $|y_a| = y_b$, sehingga $|W_a| = W_b = W_x$ an

$$|\sigma^-_{maks}| = \sigma^+_{maks} = \frac{M_{maks}}{W_x} = \frac{27(10^4)}{W_x} \leqslant \bar{\sigma}_{baja} = 1400 \text{ kg/cm}^2$$

$$W_x \geqslant 192{,}86 \text{ cm}^3$$

Dan dari tabel 6.F.1 dapat kita tentukan profil I 20, dengan $W_x = 214$ cm^3 sebagai profil baja I yang akan dipakai.

	sumbu lentur X — X	
	I_x cm^4	W_x cm^3
8	77,8	19,5
10	171	34,2
12	328	54,7
14	573	81,9
16	935	117
18	1450	161
20	2140	214
22	3060	278
24	4250	354
26	5740	442

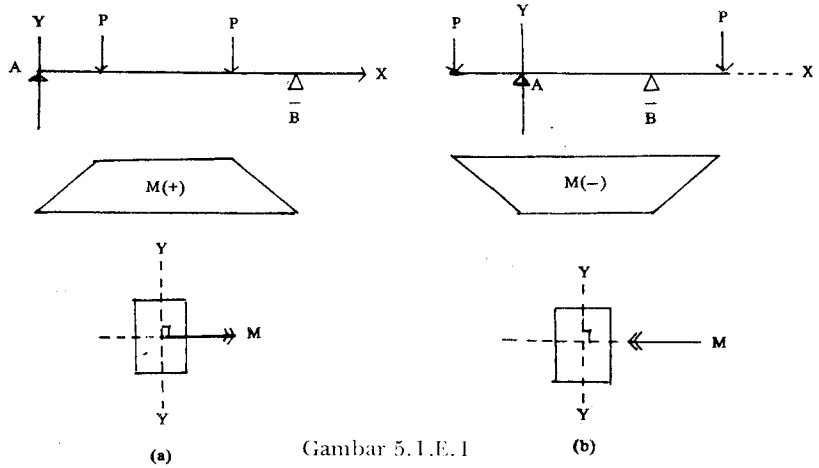
Tabel 6.F.1

Contoh 5.1.E : Lenturan serong

Untuk memudahkan pembicaraan tentang contoh ini, perlu kita tentukan dulu perjanjian tanda momen yang dinyatakan dengan vektor sebagai berikut :

Momen positif kita wakili dengan sebuah vektor yang arahnya meninggalkan bidang tempat momen yang bersangkutan bekerja (gambar 5.1.E.1 [a]); momen negatif kita wakili dengan vektor yang arahnya menuju bidang tempat momen yang bersangkutan bekerja (gambar 5.1.E.1[b]).

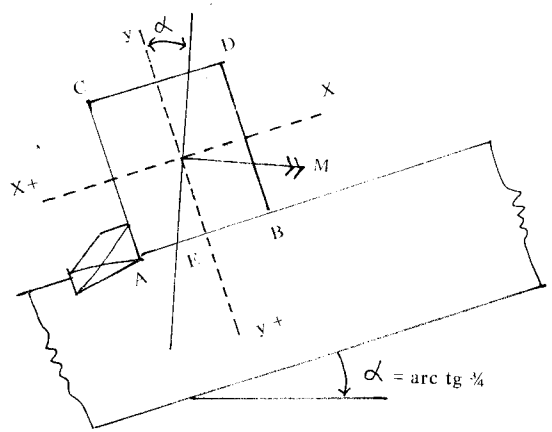
Penggambaran momen lentur dengan vektor diperlukan apabila bidang tempat momen bekerja (bidang melalui gaya-gaya P dalam gambar 5.1.E.1) tidak melalui bidang simetri balok, seperti yang umumnya terjadi pada balok gording.



Gambar 5.1.E.1

Pada sebuah atap rumah misalnya, akibat kemiringan kuda-kuda, balok gording diletakkan secara miring (gambar 5.1.E.2) sehingga momen lentur akibat gaya-gaya vertikal bekerja pada bidang vertikal yang tidak melalui bidang simetri balok (bidang vertikal tempat momen lentur bekerja membentuk sudut dengan bidang simetri tegak balok), sehingga cara yang umumnya kita gunakan adalah dengan lebih dulu menguraikan momen lentur yang bersangkutan (vektor M) menjadi dua bagian, satu bagian bekerja pada bidang simetri tegak balok, satunya lagi pada bidang simetri datar balok; kemudian perhitungan kita lakukan secara terpisah dan hasilnya kita gabungkan dengan prinsip superposisi. Lihatlah contoh berikut :

Penampang gording kayu, berukuran 8 x 12 cm^2, berkedudukan seperti terlihat pada gambar 5.1.E.2. Akibat beban vertikal yang bekerja, gording tersebut menderita momen lentur sebesar M = 5 x 10^3 kgcm, M bekerja pada bidang yang membentuk sudut α dengan bidang simetri tegak yang melalui sumbu Y (bidang melalui EF). Tentukanlah : (a) Tegangan yang terjadi di titik A, B, C dan D; dan (b) garis netral pada penampang gording tersebut.



Gambar 5.1.E.2

Solusi :

Uraikan vektor momen M dalam M_x dan M_y (gambar 5.1.E.3) :

$M_x = M \cos \alpha = 5 \times 10^3 \times 0{,}8$

$= 4 \times 10^3$ kgcm

$M_y = M \sin \alpha = 5 \times 10^3 \times 0{,}6$

$= 3 \times 10^3$ kgcm

Sehingga tegangan di titik sembarang (x,y) adalah :

$$\sigma = \frac{M_x\, y}{I_x} + \frac{M_y\, x}{I_y}$$

$\frac{M_x\, y}{I_x}$ adalah tegangan di (x,y) akibat M_x; sedangkan $\frac{M_y\, x}{I_y}$ adalah tegangan di (x,y) akibat M_y.

Sumbu X positif kita tentukan ke kiri, karena M_y menimbulkan tegangan tarik pada bagian penampang di sebelah

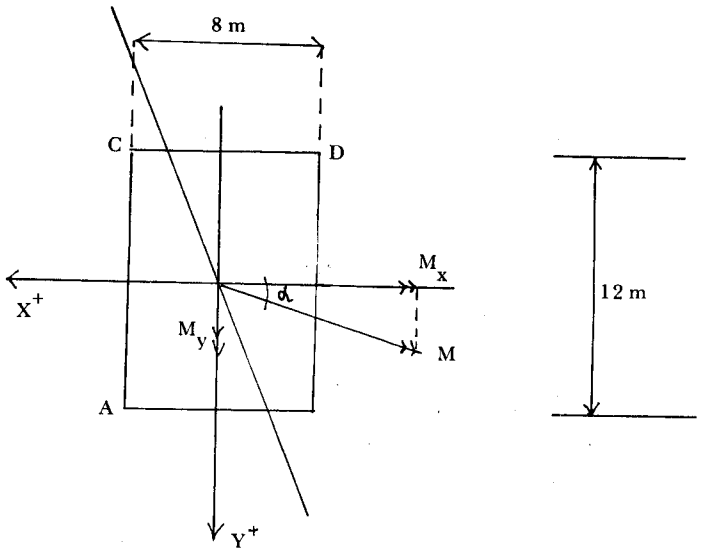
kiri sumbu Y; dan sumbu Y positif kita tentukan ke bawah, karena M_x menimbulkan tegangan tarik pada bagian penampang di sebelah bawah sumbu X. (Sumbu X dan Y melalui titik berat penampang).

Maka, di A terjadi tegangan sebesar :

$$\sigma_A = \frac{4\,(10^3)\,6}{\frac{1}{12}\,(8)(12^3)} + \frac{3\,(10^3)(4)}{\frac{1}{12}\,(8^3)(12)}$$

$$= \frac{4(10^3)(6)}{1/12(8)(12^3)} + \frac{3(10^3)(4)}{1/12(8^3)(12)}$$

$$= 44{,}27 \text{ kg/cm}^2.$$



Gambar 5.E.2

Di B, terjadi tegangan sebesar :

$$\sigma_B = \frac{M_x\, y_B}{I_x} + \frac{M_y\, x_B}{I_y}$$

$$= \frac{4(10^3)(6)}{1/12(8)(12^3)} + \frac{3(10^3)(-4)}{1/12(8^3)(12)}$$

$$= -2{,}60 \text{ kg/cm}^2.$$

Di C, terjadi tegangan sebesar :

$$\sigma_C = \frac{M_x\, y_C}{I_x} + \frac{M_y\, x_C}{I_y}$$

$$= \frac{4(10^3)(-6)}{1/12(8)(12^3)} + \frac{3(10^3)(4)}{1/12(8^3)(12)}$$

$$= +2{,}60 \text{ kg/cm}^2$$

Di D, terjadi tegangan sebesar :

$$\sigma_D = \frac{M_x\, y_D}{I_x} + \frac{M_y\, x_D}{I_y}$$

$$= \frac{4(10^3)(-6)}{1/12(8)(12^3)} + \frac{3(10^3)(-4)}{1/12(8^3)(12)}$$

$$= -44{,}27 \text{ kg/cm}^2$$

Perhatikan, tegangan ekstrim terjadi di A(4,6) dan D(−4,−6).

Kedudukan garis netral, akan kita nyatakan dengan suatu persamaan garis, dalam sistem koordinat Cartesian yang telah kita buat dalam gambar 5.E.2. Karena tegangan di setiap titik pada garis netral sama dengan nol (tidak terjadi strain pada garis netral), maka :

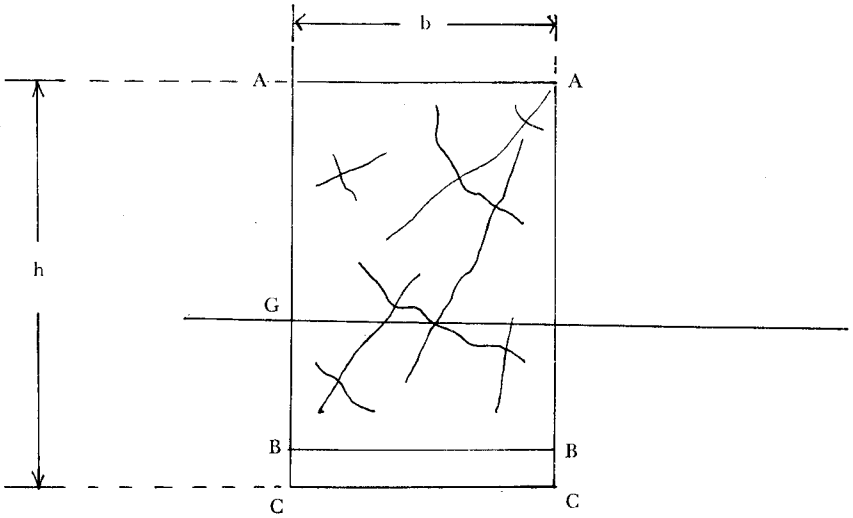
$$\frac{M_x\, y}{I_x} + \frac{M_y\, x}{I_y} = 0$$

$$\frac{4(10^3)y}{1/12(8)(12^3)} + \frac{3(10^3)x}{1/12(8)^2(12)} = 0$$

$y = -2{,}25x$, merupakan persamaan garis netral.

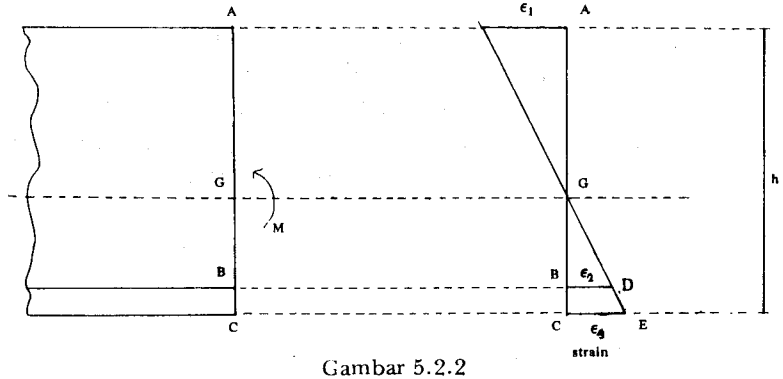
5.2 Balok Paduan atau Balok Komposit.

Balok yang terbuat dari dua jenis bahan atau lebih, disebut balok paduan atau balok komposit. Sebagai contoh, marilah kita tinjau suatu penampang balok kayu yang bagian bawahnya diperkuat oleh plat baja, seperti terlihat dalam gambar 5.2.1. Dan misalkanlah penampang paduan tersebut mengalmi lenturan murni, dengan M sebagai momen lentur positif yang bekerja pada penampang tersebut.



Gambar 5.2.1

Ikatan antara kayu dan baja pada balok kita asumsikan sedemikian kuatnya, sehingga pergeseran antara kayu dan baja selama terjadinya lenturan pada balok, dapat kita abaikan. Sehingga anggapan tetap ratanya penampang setelah terjadinya lenturan, dan strain pada serat membujur balok, yang berbanding lurus dengan jarak serat yang bersangkutan ke garis netral penampang tetap berlaku (lihat diagram strain dalam gambar 5.2.2).



Gambar 5.2.2

Akibatnya, jika tegangan kayu pada serat batas antara kayu dengan baja kita sebut σ_k, dan tegangan baja pada tempat yang sama kita sebut σ_b, maka berdasarkan andaian bahwa pada serat yang bersangkutan terjadi strain yang sama besar dan kedua bahan taat pada hukum Hooke, kita peroleh :

$$\frac{\sigma_k}{E_k} = \frac{\sigma_b}{E_b}$$

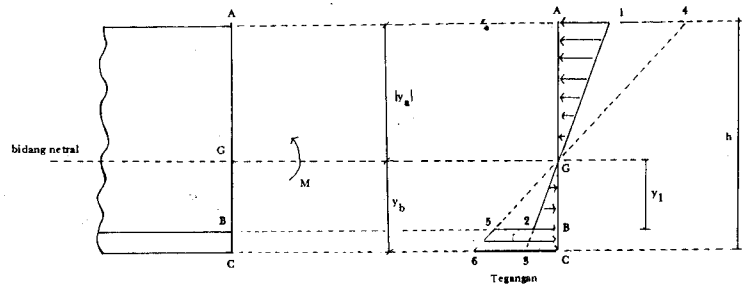
atau

$$\sigma_b = \frac{E_b}{E_k}\sigma_k \qquad (5.2.1)$$

Dengan demikian, jika tegangan kayu pada serat batas telah diketahui maka tegangan baja pada tempat yang sama dapat dihitung, dan sebaliknya. Artinya, jika diagram tegangan pada kayu mengikuti garis 1-G-2 (gambar 5.2.3), maka besarnya tegangan baja pada serat batas, garis 5-B, dapat kita tentukan dengan rumus (5.2.1), atau $\overline{5B} = (E_b/E_k)\ \overline{2B}$.

Dan berdasarkan pengandaian bahwa strain yang terjadi pada balok berbanding lurus dengan jarak serat yang bersangkutan terhadap garis netral (gambar 5.2.2), maka tegangan yang terjadi pada plat baja yang bersangkutan pun (akibat ketaatan pada hukum Hooke) akan berbanding lurus dengan

jarak serat yang bersangkutan ke garis netral, sehingga garis 5–6 pada gambar 5.2.3 juga akan bersifat lurus dan, jika kita perpanjang haruslah melalui titik G (garis netral melalui G). Sehingga diagram tegangan pada penampang paduan ini dapat digambar seperti terlihat pada gambar 5.2.3.

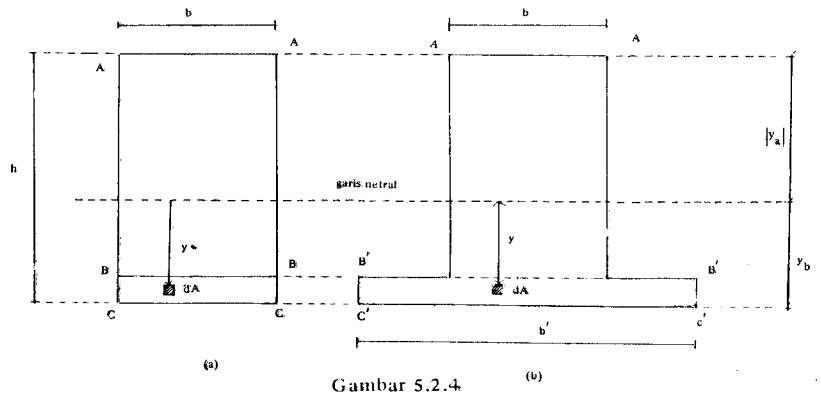


Gambar 5.2.3

Setelah diagram tegangan ditentukan, perhitungan besarnya tegangan pada balok paduan tersebut dapat dilakukan seperti yang telah kita lakukan pada balok homogen yang mengalami lenturan murni, yakni berdasarkan prinsip bahwa resultan gaya tekan dan gaya tarik harus menghasilkan momen kopel sebesar momen yang diderita pada penampang yang bersangkutann, dan kedua gaya tarik dan tekan tersebut harus sama besarnya.

Tetapi, perhitungan akan menjadi lebih mudah jika bentuk diagram tegangan yang "patah" di titik 2 dalam gambar 5.2.3 dapat kita gantikan dengan diagram tegangan yang lurus, dan ini akan tercapai jika penampang paduan tersebut kita gantikan dengan penampang yang hanya terdiri dari satu jenis bahan saja; Artinya, berdasarkan keadaan sebenarnya, yakni besarnya strain yang terjadi pada balok akibat momen luar, kita cari suatu "penampang ideal" yang terdiri dari satu bahan saja sedemikian rupa sehingga *strain yang terjadi pada "penampang ideal" tersebut persis sama dengan strain yang terjadi pada balok paduan.*

Tentu saja, karena dalam hal ini baja lebih kuat daripada kayu, jumlah bahan kayu pengganti baja haruslah lebih banyak, artinya luas penampang kayu pengganti baja haruslah lebih besar daripada luas penampang baja.



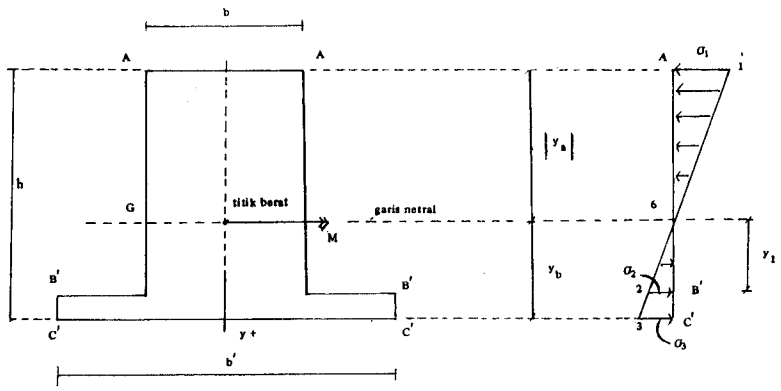
Gambar 5.2.4

Misalkan, penampang paduan yang sedang kita tinjau ini (gambar 5.2.4.a) kita gantikan dengan penampang ideal (gambar 5.2.4.b) yang homogen, terbuat dari kayu. Tinggi penampang ideal, kita pertahankan sama dengan tinggi penampang paduan (= h); sedangkan lebar penampang kayu pengganti (penampang B'B'C'C') adalah b'yang sekarang ini, belum kita ketahui. Diagram tegangan pada penampang ideal ini menjadi berbentuk lurus (gambar 5.2.5). Dan, karena kayu adalah kayu, bagian diagram tegangan kayu pada gambar 5.2.5 sampai serat batasnya (garis 1-G-2) haruslah sama dengan diagram semula; sedangkan bagian diagram tegangan kayu pengganti pada daerah baja (garis 2-3) juga sama dengan garis putus-putus 2-3 dalam diagram tegangan pada gambar 5.2.3, karena agar strain yang terjadi pada baja maupun pada kayu sama besarnya pada setiap serat dalam daerah baja ($y_1 \leqslant y \leqslant y_b$), hubungan yang dinyatakan dalam rumus (5.2.1) harus berlaku pada setiap serat balok dalam daerah baja, dengan kata lain,

$$\sigma_b(y) = \frac{E_b}{E_k}\sigma_k(y); \qquad y_1 \leq y \leq y_b \qquad (5.2.1.A)$$

dengan :

$\sigma_k(y)$ = tegangan kayu pada serat sejauh y dari garis netral.



Gambar 5.2.5

Syarat lain yang harus dipenuhi oleh penampang ideal tersebut adalah : Gaya yang dihasilkan oleh penampang ideal akibat tegangan yang terjadi harus sedemikian rupa sehingga ia membentuk momen kopel sebesar M (= momen lentur murni yang diderita balok pada penampang yang bersangkutan). Dan karena yang mengalami perubahan hanyalah bagian penampang pengganti baja, maka tinjaulah saja bagian penampang pengganti tersebut, yakni B'B'C'C', karena telah kita "jadikan" kayu, tegangan yang bersangkutan mengikuti garis 2-3 (gambar 5.2.5), sehingga resultan gaya yang terjadi akibat tegangan tersebut adalah :

$$F_k = \int_{A_1} \sigma_k(y)\, dA$$

Tetapi menurut (5.1.4) $\sigma(y) = (E/\rho)\, y$, sehingga

$$F_k = \frac{E_k}{\rho}\int_{A_1}\sigma_b(y)\, dA = \frac{E_k}{\rho} A_1\, y_t \qquad (5.2.2)$$

dengan :

A_1 = luas penampang B'B'C'C'.

y_t = jarak titik berat B'B'C'C' ke garis netral.

Pada penampang asli baja BBCC, tegangan yang terjadi pada baja mengikuti garis 5-6 pada gambar 5.2.3, sehingga resultan gaya yang terjadi adalah :

$$F_b = \int_{A_2}\sigma_b(y)\, dA \qquad (5.2.3)$$

dengan :

A_2 = luas penampang baja BBCC.

Pergantian dengan (5.2.1.A) ke dalam (5.2.3) menghasilkan :

$$F_b = \int_{A_2} \frac{E_b}{E_k}\sigma_k(y)\, dA$$

Tetapi $\sigma_k(y) = (E_k/\rho)\, y$, sehingga kita peroleh :

$$F_b = \frac{E_b}{\rho}\int_{A_2} y\, dA = \frac{E_b}{\rho} A_2\, y'_t \qquad (5.2.4)$$

Dengan :

y'_t = jarak titik berat BBCC ke garis netral.

Kedua resultan gaya, F_k dan F_b harus sama, sehingga kita peroleh :

$$\frac{E_k}{\rho} A_1\, y_t = \frac{E_b}{\rho} A_2\, y'_t$$

Tetapi, $A_1 = (y_b - y_1)b'$ dan $A_2 = (y_b - y_1)b$, serta $y_t = y'_t$ sehingga kita peroleh :

$$b' = \frac{E_b}{E_k} b \qquad (5.2.5)$$

Selanjutnya, setelah b' ditentukan, dengan cara seperti yang telah kita lakukan pada bagian 5.1 bab ini, akan kita peroleh bahwa :

i) Letak garis netral adalah di garis berat penampang ideal.

ii) Pada setiap serat balok ideal yang kita tinjau, besarnya tegangan yang terjadi dapat ditentukan dengan rumus

$$\sigma_k(y) = \frac{M\,y}{I} \qquad (5.2.6)$$

dengan :

M = momen lentur yang diderita penampang yang bersangkutan.

y = jarak serat terhadap garis netral (garis berat).

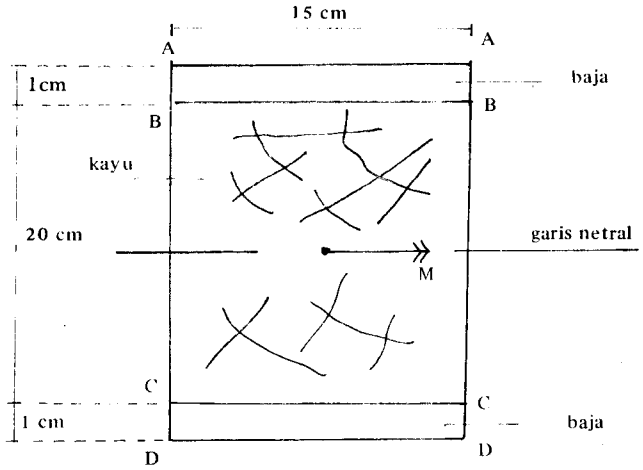
I = momen inersia penampang ideal terhadap garis netral.

iii) Berdasarkan hubungan (5.2.1.A), tegangan baja dapat ditentukan karena tegangan ideal yang kita peroleh dengan rumus (5.2.6) dapat ditentukan, atau dengan kata lain,

$$\sigma_b(y) = \frac{E_b}{E_k}\left(\frac{M\,y}{I}\right),\quad y_1 \leqslant y \leqslant y_b \qquad (5.2.7)$$

Contoh 5.2 :

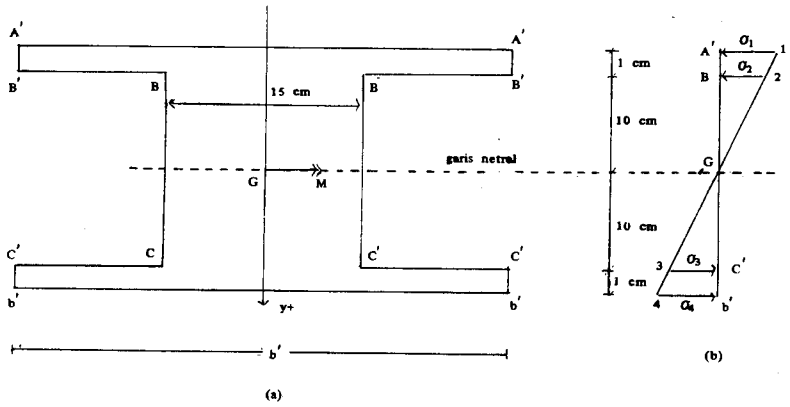
Penampang batang paduan yang terdiri dari kayu dan baja (gambar 5.2.A.1), mengalami momen lentur M = 10^5 kgcm. Modulus keelastisan kayu, $E_k = 10^5$ kg/cm^2 ; sedangkan modulus keelastisan baja, $E_b = 2{,}1(10^6)$ kg/cm^2. Tentukanlah tegangan-tegangan ekstrim yang terjadi, baik pada kayu maupun pada baja.



Gambar 5.2.A.1

Solusi :

Penampang baja AABB dan CCDD kita "ganti" dulu dengan penampang kayu pengganti A'A'B'B' dan C'C'D' D'; kita peroleh, "penampang ideal" yang homogen, terbuat dari kayu (gambar 5.2.A.2.a), dengan b' = E_b/E_k (15 cm) = 315 cm dan diagram tegangannya dalam gambar 5.1.A.2.b.



Gambar 5.2.A.2

Momen inersia penampang ideal terhadap garis netral adalah :

$$I = 2[(1/12)(315)(1^3) + (315)(1)(10{,}5)^2] + (1/12)(15)(20^3)$$
$$= 79510\ \text{cm}^4.$$

Tegangan-tegangan pada penampang ideal (gambar 5.1.A.2.b) :

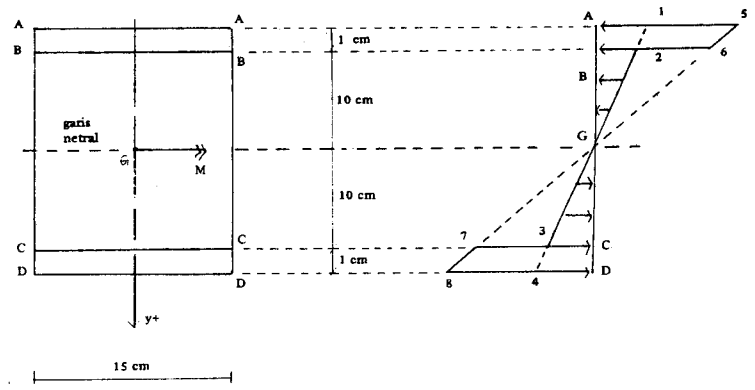
$$\sigma_1 = \frac{M(-11)}{I} = \frac{10^5(-11)}{79510} = -13{,}84 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{M(-10)}{I} = \frac{10^5(-10)}{79510} = -12{,}58 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_3 = \frac{M(10)}{I} = = \frac{10^5(10)}{79510} = 12{,}58 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_4 = \frac{M(11)}{I} = \frac{10^5(11)}{79510} = 13{,}84 \text{ kg/cm}^2$$

Tegangan-tegangan ekstrim pada baja dan kayu (penampang paduan) dapat kita tentukan dengan memperhatikan gambar 5.2.A.3.



Gambar 5.2.A.3

Tegangan tarik maksimum pada baja, terjadi pada tepi bawah DD :

$$\sigma^+_{maks} \text{ baja} = E_b/E_k\ \sigma_4 = 290{,}64 \text{ kg/cm}^2$$

Tegangan tekan maksimum pada baja, terjadi pada tepi ats AA :

$$\sigma^-_{maks} \text{ baja} = E_b/E_k\ \sigma_1 = -290{,}64 \text{ kg/cm}^2$$

Tegangan tarik maksimum pada kayu, terjadi pada "serat batas" CC :

$$\sigma^+_{maks} \text{ kayu} = \sigma_3 = 12{,}58 \text{ kg/cm}^2$$

Tegangan tekan maksimum pada kayu, terjadi pada "serat batas" BB :

$$\sigma^+_{maks} \text{ kayu} = \sigma_1 = -13{,}84 \text{ kg/cm}^2.$$

5.3 Balok Beton Bertulang.

Suatu hal yang perlu anda perhatikan dalam menghitung tegangan akibat momen lentur pada balok beton bertulang ialah, sangat kecilnya kekuatan beton dalam menghadapi tegangan tarik, hingga kekuatan tarik beton dapat diabaikan dan dianggap bahwa *tegangan tarik* yang terjadi pada beton bertulang tersebut *dipikul seluruhnya oleh tulangan baja* yang terpasang pada sisi balok yang mengalami tegangan tarik (gambar 5.3.1.a). Dan konsep "penampang ideal" pun mengalami "penyesuaian", seperti yang anda lihat dalam gambar 5.3.1.b : di bagian penampang yang mengalami tegangan tarik, hanya terdapat "penampang beton pengganti baja" seluas E_{baja}/E_{beton} kali jumlah luas penampang baja yang ada. Jadi, jika luas penampang beton pengganti baja tersebut kita nyatakan dengan A', dan jumlah luas penampang baja yang ada tersebut kita nyatakan dengan A_b, maka :

$$A' = \frac{E_{baja}}{E_{beton}} A_b$$

Dan untuk penyederhanaan, tebal penampang pengganti tersebut dapat kita abaikan, sehingga momen inersia *pribadi* penampang pengganti tersebut sama dengan nol. Momen inersia penampang ideal terhadap garis netral menjadi

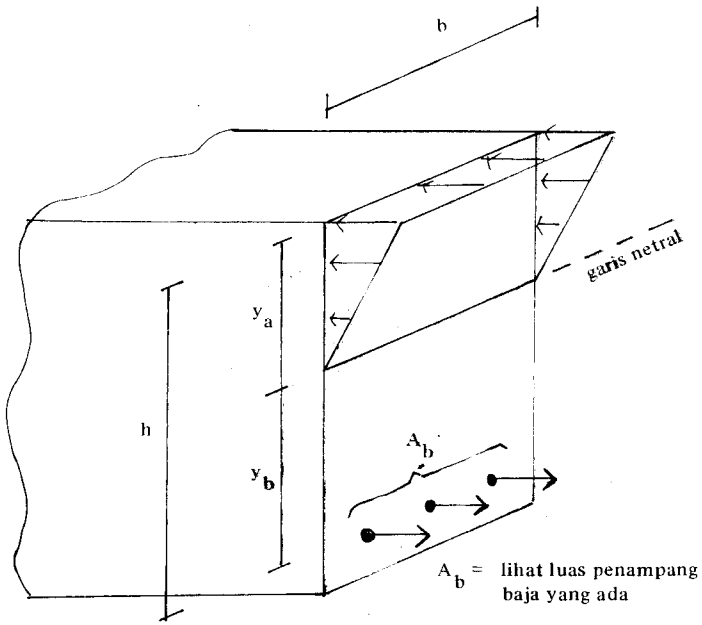
$$I = 1/3b\ y_a^3 + 0 + A'\ y_b^2,$$

atau

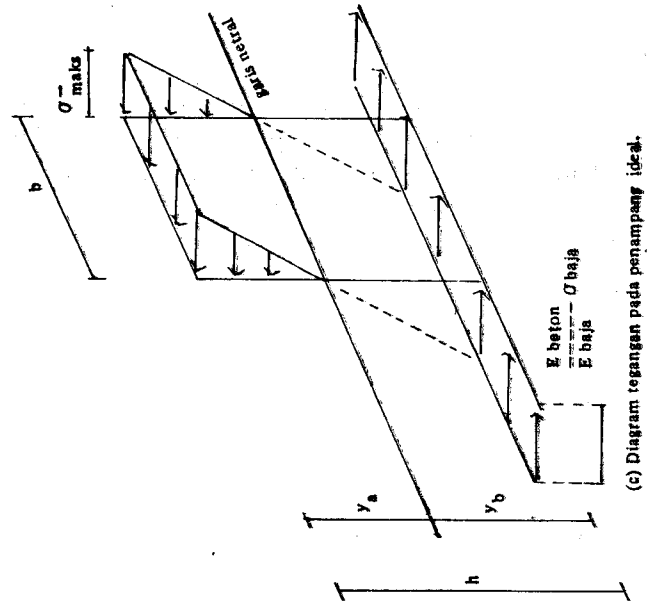
$$I = 1/3b\ y_a^3 + A'\ y_b^2.$$

Diagram tegangan pada penampang ideal dapat digambarkan sebagaimana terlihat dalam gambar 5.3.1.c. Diagram tegangan ini, juga dibuat berdasarkan asumsi bahwa ikatan yang kuat antara beton dan baja tidak memungkinkan terjadinya pergeseran antara kedua bahan tersebut; Dan pengandaian : "tetap ratanya penampang selama terjadinya lenturan", tetap berlaku.

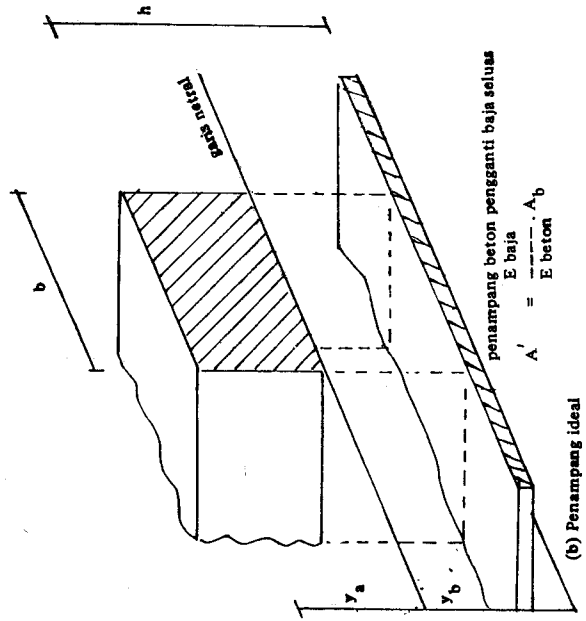
Resultan tegangan tarik pada penampang ideal tersebut, tentu saja, harus sama besar dengan resultan tegangan tekannya, dan kopel gaya yang dihasilkan oleh kedua resultan tegangan tarik dan tekan tersebut akan sama besar dengan momen lentur yang bekerja pada penampang beton bertulang yang kita tinjau. Sehingga hitungan tegangan dapat kita,lakukan dengan cara yang sama seperti yang telah dijelaskan dalam uraian sebelum ini.



(a)



(c) Diagram tegangan pada penampang ideal.

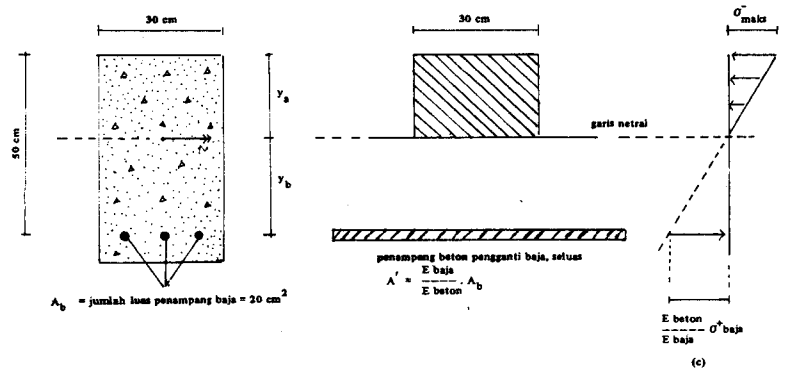


(b) Penampang ideal

Gambar 5.3.1

Contoh 5.3.A :

Suatu penampang balok beton bertulang (gambar 5.3.A.1), menderita momen lentur positif M = 6 x 10^5 kgcm. Tentukanlah tegangan ekstrim akibat momen lentur tersebut, yang terjadi pada beton dan baja, jika E_{baja} = $2{,}1(10)^6$ kg/cm^2 dan E_{beton} = 1,4 (10^5) kg/cm^2.



Gambar 5.3.A.1

Solusi :

Luas penampang beton pengganti baja dalam penampang ideal adalah

$$A' = \frac{E_{baja}}{E_{beton}} A_b = \frac{2{,}1(10^6)}{1{,}4(10^5)}(20\ cm^2) = 300\ cm^2.$$

Garis netral penampang beton bertulang identik dengan garis berat penampang ideal, sehingga :

$$30\ y_a\ (\tfrac{1}{2}\ y_a) = A'(50 - y_a)$$
$$15\ y_a^2 = 300(50 - y_a)$$
$$y_a^2 + 20\ y_a - 1000 = 0$$
$$y_a = 23{,}17\ cm$$
$$y_b = 50 - 23{,}17 = 26{,}83\ cm.$$

Momen inersia penampang ideal terhadap garis netral adalah :

$$I = 1/3(30)(23{,}17^3) + 300(26{,}83^2)$$
$$= 340342{,}56\ cm^4.$$

Tegangan tekan maksimum pada beton adalah :

$$\sigma^-_{maks} = \frac{M\ y_a}{I} = \frac{6(10^5)(23{,}17)}{340342{,}56}$$
$$= 40{,}85\ kg/cm^2.$$

Tegangan tarik pada baja adalah :

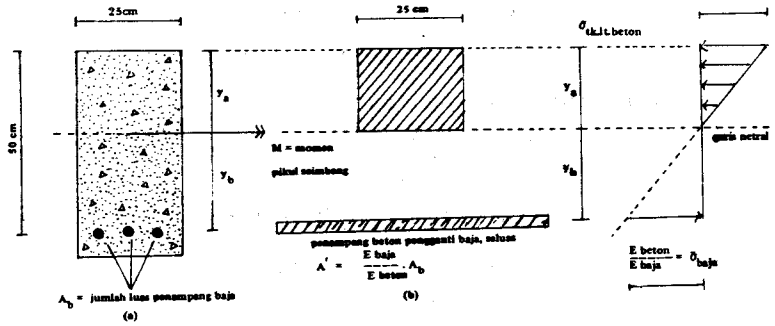
$$\sigma^+_{baja} = \frac{E_{baja}}{E_{beton}} \left(\frac{M\ y_b}{I}\right)$$
$$= \frac{2{,}1(10^6)}{1{,}4(10^5)} \left(\frac{6(10^5)(26{,}83)}{340342{,}56}\right)$$
$$= 709{,}49\ kg/cm^2$$

Contoh 5.3.B :

Rancangan beton bertulang yang ideal adalah jika tegangan baja dan tegangan beton maksimum yang terjadi, kedua-duanya mencapai tegangan yang diijinkan; dalam Konstruksi Beton keadaan tersebut disebut sebagai "keadaan seimbang". Dan momen lentur yang bersangkutan disebut sebagai "momen pikul seimbang". Nah sekarang, tentukanlah luas penampang tulangan tarik baja* yang harus dipasang pada penampang balok beton bertulang yang berdimensi seperti terlihat dalam gambar 5.3.B.1.a, agar "keadaan seimbang" terjadi pada penampang beton bertulang tersebut; dan tentukan pula "momen pikul seimbang"nya, jika tegangan tekan akibat momen lentur yang

* Tulangan tarik baja adalah tulangan baja yang dipasang untuk menahan tegangan tarik yang terjadi pada balok beton bertulang yang bersangkutan. Tetapi sesungguhnya, ada juga yang disebut tulangan tekan. Tentang ini, anda dapat mempelajarinya dalam Ilmu Konstruksi Beton.

diijinkan terjadi pada beton adalah : $\bar{\sigma}_{tk.lt.beton}$ = 60 kg/cm^2 dan tegangan akibat momen lentur yang diijinkan terjadi pada baja adalah : $\bar{\sigma}_{baja}$ = 1400 kg/cm^2. Modulus keelastisan beton, E_{beton} = 1,4(10^5) kg/cm^2; sedangkan modulus keelastisan baja, E_{baja} = 2,1(10^6) kg/cm^2.



Gambar 5.3.B.1

Solusi :

Nyatakan A_b sebagai jumlah luas penampang tulangan baja yang harus dipasang; dan M sebagai "momen pikul seimbang".

Tegangan maksimum yang terjadi pada beton, harus sama dengan tegangan batas beton yang diijinkan; berarti,

$$\bar{\sigma}_{tk.lt.beton} = \frac{M\, y_a}{I}$$

$$60 = \frac{M\, y_a}{I} \qquad (5.3.B.1)$$

Tegangan yang terjadi pada baja, harus sama dengan tegangan baja yang diijinkan; berarti,

$$\bar{\sigma}_{baja} = \frac{E_{baja}}{E_{beton}} \left(\frac{M\, y_b}{I}\right)$$

$$1400 = \frac{2{,}1(10^6)}{1{,}4(10^5)} \left(\frac{M(50-y_a)}{I}\right)$$

$$1400 = 15\frac{M(50-y_a)}{I} \qquad (5.3.B.2)$$

Bagilah(5.3.B.1) dengan (5.3.B.2), kita peroleh :

$$\frac{60}{1400} = \frac{y_a}{15(50-y_a)}$$

$$y_a = 19{,}57 \text{ cm}$$

Luas penampang tulangan tarik baja yang harus dipasang dapat kita tentukan dengan mengingat bahwa :

Resultan tegangan tarik = resultan tegangan tekan

$$1400\, A_b = 60(\tfrac{1}{2} y_a)(25)$$

$$1400\, A_b = 60(9{,}785)(25)$$

$$A_b = 10{,}48 \text{ cm}^2.$$

Momen inersia penampang ideal terhadap garis netral adalah :

$$I = 1/3(25)(y_a)^3 + \frac{E_{baja}}{E_{beton}} A_b\, y_b^2$$

$$= 1/3(25)(19{,}57)^3 + \frac{2{,}1(10^6)}{1{,}4(10^5)}(10{,}48)(50-19{,}57)^2$$

$$= 208023{,}27 \text{ cm}^4.$$

Maka "momen pikul seimbang" dapat ditentukan sebagai berikut :

$$M = \frac{I\,(\bar{\sigma}_{tk.lt.beton})}{y_a}$$

$$= \frac{(208023{,}27\ \text{cm}^4)(60\ \text{kg/cm}^2)}{19{,}57\ \text{cm}}$$

$$= 6{,}38\ \text{tonmeter.}$$

atau,

$$M = \frac{I(\bar{\sigma}_{baja})}{15(50 - y_a)}$$

$$= \frac{(208023{,}27\ \text{cm}^4)(1400\ \text{kg/cm}^2)}{15(50\ \text{cm} - 19{,}57\ \text{cm})}$$

$$= 6{,}38\ \text{tonmeter.}$$

5.4 Pengaruh bentuk penampang balok :

Kalau kita perhatikan contoh-contoh yang telah kita bahas sejak bab I, akan kita temukan bahwa pada dasarnya mereka terdiri dari dua macam masalah, penganalisan dan/atau perancangan. Jenis pertama berkisar pada pengukuran apakah suatu bangunan, yang baik akibat beban yang harus dipikulnya maupun bentuk serta ukurannya telah diberikan, memenuhi syarat kekokohan atau tidak. Dan jenis ke dua berkisar pada penentuan atau perancangan bentuk dan ukuran bangunan agar ia mampu memikul beban yang akan dipikulnya.

Tetapi dalam kenyataannya, proses penganalisaan pada akhirnya toh akan kembali kepada masalah perancangan. Misalnya, jika hasil analisa menyimpulkan bahwa ukuran balok yang diberikan tidak memenuhi syarat kekokohan, maka penentuan ukuran balok yang lebih kokoh harus dilakukan; atau katakanlah bahwa syarat kekokohan dipenuhi, tetapi tidak jarang kita jumpai bahwa bangunan tersebut terlalu kokoh sehingga masalah penghematan akhirnya jadi pertimbangan. Alhasil, akhirnya masalah perancanganlah yang rupanya "lebih penting".

Di luar masalah keindahan suatu bangunan, yang kadang-kadang muncul sebagai suatu kekangan yang harus ditaati, pada umumnya dasar pertimbangan yang kita gunakan untuk perancangan adalah syarat kekokohan, jika untuk itu kita punya banyak pilihan maka bentuk balok yang terhematlah yang kita pilih. Di bawah ini, aspek tersebut akan digambarkan melalui tinjauan kekokohan suatu balok yang menderita momen lentur murni saja.

Kita tahu bahwa tegangan yang timbul pada penampang balok yang menderita momen lentur murni M dinyatakan dengan (5.1.8) :

$$\sigma(y) = \frac{M\,y}{I}$$

Jadi, ada 3 besaran yang berpengaruh terhadap tegangan akibat momen, tetapi tinjaulah dulu keadaan di mana harga M tetap karena dalam perhitungan umumnya harga M maksimumlah yang kita tinjau, dan harga momen maksimum suatu bangunan merupakan akibat formasi dan beban yang harus dipikul bangunan yang bersangkutan, yang umumnya merupakan harga mati yang tidak bisa "ditawar".

Selanjutnya, anggaplah bahwa M positif sehingga berhubung I selalu positif maka jenis tegangan yang terjadi akibat momen M bergantung pada tanda y, bisa positif (tegangan tarik) bisa negatif (tegangan tekan). Jika jarak tepi atas ke garis netral ($|y_a|$) dan jarak tepi bawah ke garis netral (y_b) sama besarnya, maka tegangan tekan maksimum dan tegangan tarik maksimum yang terjadi akibat M juga akan sama besarnya, sehingga mudah dimengerti bahwa jika bahan balok memiliki batas tegangan tekan dan batas tegangan tarik yang *sama* besarnya, bentuk semacam itulah yang seharusnya digunakan agar kedua batas tegangan tersebut dapat dimanfaatkan sepenuhnya. Lihatlah misalnya balok baja untuk menahan momen lentur, umumnya berbentuk huruf I, Z atau C, dan balok kayu umumnya ber-

bentuk empat persegi panjang (selanjutnya disingkat menjadi epp).

Di antara bentuk penampang yang memiliki sifat tersebut di atas, yang kerap kita jumpai adalah bentuk-bentuk epp, huruf I dan lingkaran, marilah kita perbandingkan.

Pertama kita bahas dulu penampang epp yang berukuran b x h. Sebutlah luasnya A, maka dari (5.1.17) kita tahu bahwa tegangan maksimum yang terjadi akibat momen lentur M adalah :

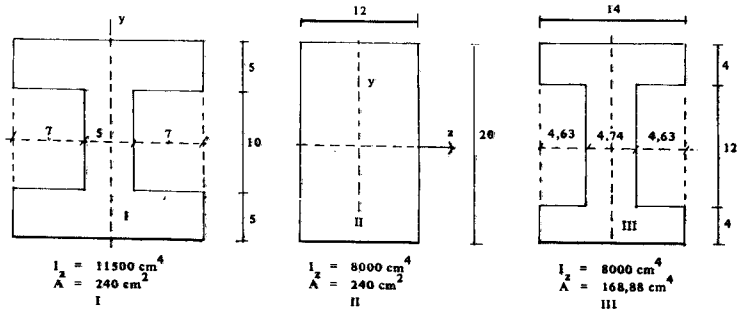
$$|\sigma_{maks}| = \frac{6M}{Ah}$$

Dari rumus di atas jelas terlihat bahwa jika luas penampang balok (=A) kita pegang tetap, maka semakin besar h semakin kokohlah baloknya karena tegangan maksimum yang terjadi semakin kecil. Sebaliknya jika tegangan maksimum kita buat sama dengan tegangan yang diijinkan, artinya kekokohan balok dimanfaatkan sepenuhnya, maka luas penampang balok (A) dapat kita perkecil asal h kita perbesar, sehingga bahan dapat kita hemat. Alhasil, dari segi manapun kita tinjau, sejauh hal yang menyangkut tegangan akibat momen lentur murni, semakin tinggi balok semakin baiklah adanya. Tentu saja pembesaran h ada batasnya, jika tidak demikian, pada suatu saat akan kita dapatkan bahwa balok kita sedemikian langsingnya sehingga mudah tertekuk; dan tidak ada orang yang menggunakan papan untuk memikul momen lentur, bukan? *

Tinjaulah 3 buah penampang dalam gambar 5.4.1. Dengan mudah dapat kita hitung bahwa meskipun luas dan

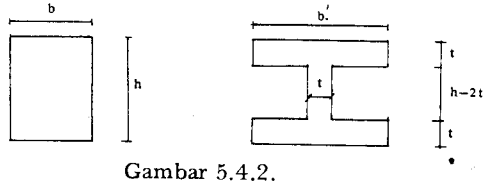
* Tentang gejala tertekuknya balok balok, bisa dipelajari di dalam Mekanika Teknik yang lebih lanjut atau di dalam Konstruksi Baja.

*tinggi*** penampang I dan II sama, namun momen inersia penampang I lebih besar daripada penampang II, sehingga jika bahannya sama, tentulah penampang I lebih kokoh daripada penampang II. (Ingat faktor kekakuan terhadap momen lentur, EI). Sebaliknya, meskipun luas penampang III lebih kecil daripasa luas penampang II, namun momen inersia kedua penampang tersebut sama.



Gambar 5.4.1

Gambaran di atas hanyalah ditujukan untuk memperoleh kesan bahwa penampang berbentuk huruf I lebih "kuat" dan hemat daripada penampang epp. Untuk peragaan yang lebih umum, tinjaulah perbandingan antara penampang epp dengan penampang huruf I yang ukurannya masing-masing tertera pada gambar 5.4.2.



Gambar 5.4.2.

** Dengan mengambil tinggi yang sama untuk semua penampang, faktor y_a atau y_b menjadi selalu tetap sehingga hanya faktor momen inersia saja yang perlu kita tinjau dalam memperbandingkan besarnya σ_{max} yang timbul.

Sebutlah masing-masing, luas dan momen inersia kedua balok yang bersangkutan sebagai A_1, I_1, A_2 dan I_2, maka kita peroleh :

$$A_1 - A_2 = h[b - b' + (\frac{h-2t}{h})(b'-t) \quad (5.4.1)$$

$$I_1 - I_2 = \frac{h_3}{12}(b-b' + (\frac{h-2t}{h})^3 (b'-t) \quad (5.4.2)$$

Jika $A_1 = A_2$, kita peroleh

$b'-b = (\frac{h-2t}{h})(b'-t)$, sehingga (5.4.2) menjadi :

$$I_1 - I_2 = \frac{h^3}{12}(\frac{h-2t}{h})(b'-t)[(\frac{h-2t}{h})^2 - 1]$$

Karena $0 < (\frac{h-2t}{h}) < 1$ dan $0 < (b'-t)$, jelaslah bahwa $I_1 - I_2 < 0$, atau $I_1 < I_2$

Sebaliknya jika $I_1 = I_2$, kita peroleh

$$b'-b = (\frac{h-2t}{h})^3 (b'-t)$$

sehingga (5.4.1) menjadi :

$$A_1 - A_2 = h (\frac{h-2t}{h})(b'-t)[1 - (\frac{h-2t}{h})^2] > 0, \text{ atau}$$

$A_1 > A_2$.

Selanjutnya mari kita bandingkan penampang epp, bxh dengan penampang lingkaran dengan panjang garis tengah = h. Jika luas kedua penampang tersebut sama, maka kita peroleh :

$$b = \frac{\pi}{4}h \quad (5.4.3)$$

Dan selisih momen inersia keduanya :

$$I_{epp} - I_1 = 1/12\ bh^3 - 1/64\ \pi\ h^4 \quad (5.4.4)$$

Masukkan (5.4.3) ke dalam (5.4.4) kita peroleh :

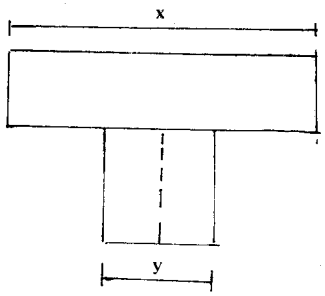
$$I_{epp} - I_1 = \frac{1}{192}\pi h^4 > 0, \text{ atau } I_{epp} > I_1$$

Alhasil, mudah disimpulkan bahwa di antara ketiga penampang yang telah kita bicarakan, penampang berbentuk huruf I-lah yang paling ekonomis, jadi tidaklah mengherankan jika balok baja I banyak digunakan orang untuk memikul momen lentur.

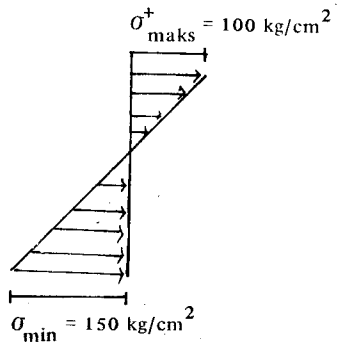
Jika bahan balok memiliki kekuatan tarik dan tekan yang tidak sama besarnya, beton atau besi tuang misalnya memiliki batas tegangan tarik yang kecil sekali dan tegangan tekan yang relatif besar, maka penampang yang tidak simetriklah yang lebih menguntungkan, misalnya penampang berbentuk huruf T yang bisa kita atur sedemikian rupa sehingga letak garis netralnya dari serat tepi atas dan bawah (y_a dan y_b) sebanding dengan batas tegangan tekan dan tarik yang dimilikinya, dengan demikian kekokohannya dalam menanggulangi tegangan tarik maupun tegangan tekan menjadi sama.

Contoh 5.4 :

Sebuah balok terjepit sebelah memikul beban P = 1 ton di ujung bebasnya, bahan balok memiliki batas tegangan tekan sebesar 150 kg/cm^2 dan batas tegangan tarik sebesar 100 kg/cm^2. Jika bentuk penampang balok ditentukan seperti dalam gambar 5.4.A.1, tentukanlah besar x dan y pada balok tersebut agar keadaan seimbang tercapai, atau kekuatan bahan termanfaatkan sepenuhnya. Panjang balok 3 meter dan beratnya diabaikan.



Gambar 5.4.A.1



Gambar 5.4.A.2

Solusi :

Momen maksimum, $M = -3(10^5)$kgcm.

Agar kekuatan balok termanfaatkan sepenuhnya, diagram tegangan balok haruslah seperti dalam gambar 5.4.A.2, sehingga letak garis netralnya haruslah pada jarak 100/(100+150) tinggi balok, dari tepi bawahnya (kebetulan persis di perbatasan antara sayap dan badan balok).

Dari syarat letak garis netral (garis berat) ini kita peroleh :

$$\frac{15(y)(7,5) + 10(x)(20)}{15y + 10x} = 15$$

atau, $4x = 9y$ (5.4.A.1)

Tegangan tekan pada tepi bawah balok = -150 kg/cm^2,

$$-150 = \frac{-3(10^5)(15)}{I} \qquad (5.4.A.2)$$

dengan I = momen inersia penampang balok terhadap garis netral, atau

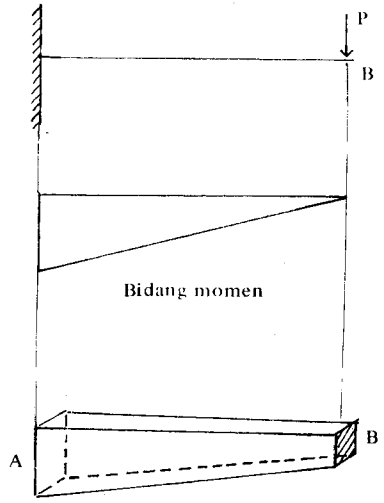
$$I = 1/12(x)(10^3)+10x(5^2)+1/12(y)(15^3)+15y(7,5)^2 \qquad (5.4.A.3)$$

Dari ketiga persamaan di atas, mudah dihitung bahwa :

x = 36 dan y = 16.

Dari berbagai contoh dan gambaran serba sedikit tentang pengaruh penampang balok terhadap tegangan yang timbul akibat momen lentur, mengertilah kita sekarang bahwa di samping bahan, ukuran dan bentuk balok juga sangat menentukan kekokohannya. Dan jika momen lentur yang diderita balok berubah secara tajam, seperti pada balok terjepit sebelah yang dibebani pada ujung bebasnya misalnya, maka untuk menghemat bahan, kita bisa juga menggunakan balok yang penampangnya berubah-ubah sesuai dengan besar momen yang diderita setiap penampang yang bersangkutan. Kenyataan ini sudah sering kita jumpai, bukan?

Teknik penghematan semacam itu dengan mudah bisa kita rasakan melalui ilustrasi berikut (gambar 5.4.3) :

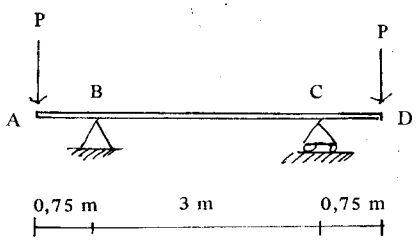


Luas penampang balok di A lebih besar daripada luas penampang balok di B.

Gambar 5.4.3

5.4 SL SOAL LATIHAN

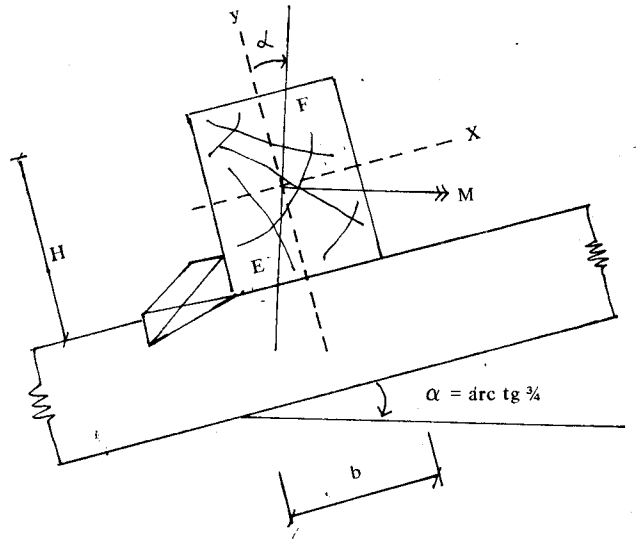
1. Balok prismatik epp ABCD di atas tumpuan sendi dan rol (gambar A), memikul beban terpusat P = 2500 kg di titik A dan D. Berat balok diabaikan. Panjang balok 4,5 m, tumpuan B terletak pada jarak 0,75 m dari A dan tumpuan C terletak pada jarak 0,75 m dari D.
   a. Tentukanlah tegangan maksimum yang terjadi pada bagian BC, jika ukuran penampang balok adalah 15x25 cm^2.
   b. Rancangkanlah ukuran penampang terhemat balok yang berbentuk epp jika tegangan batas balok $\bar{\sigma}_{balok}$ = 120 kg/cm^2 dan lebar balok ditentukan 15 cm.



Gambar A

   c. Tentukanlah diameter minimum penampang balok jika penampang balok berbentuk setengah lingkaran.
   d. Tentukanlah P maksimum yang boleh bekerja serentak di titik A dan D jika penampang balok berbentuk setengah lingkaran yang garis tengahnya = 15 cm.
   e. Tentukankah profil I baja yang dapat dipakai untuk menggantikan balok ABCD tersebut, jika tegangan batas baja $\bar{\sigma}_{baja}$ = 1250 kg/cm^2.

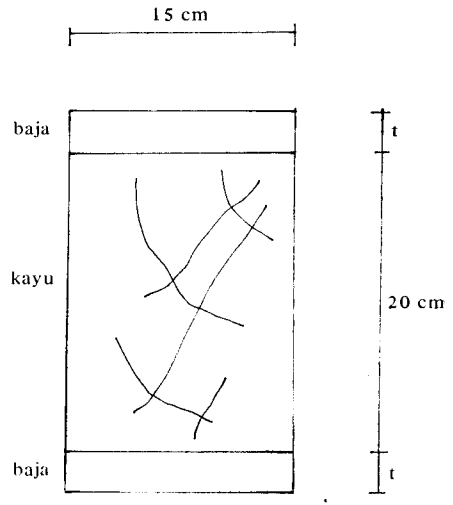
2. Penampang gording kayu, berbentuk epp, berkedudukan seperti terlihat pada gambar B akibat beban vertikal yang bekerja, gording tersebut menderita momen lentur sebesar M = 6 x 10^3 kgcm, M bekerja pada bidang yang membentuk sudut α dengan bidang simetri tegak yang melalui sumbu Y (bidang melalui EF).
   a. Tentukanlah tebal gording (=h) minimum, jika tegangan batas gording $\bar{\sigma}$ = 80 kg/cm^2 dan lebar gording ditentukan b = 8 cm.
   b. Tentukanlah garis netral pada penampang gording tersebut jika penampang gording berukuran 8 x 12 cm^2 .



Gambar B

3. Penampang batang paduan yang terdiri dari kayu dan baja (gambar C) mengalami momen lentur M = 2(10^5) kgcm. Modulus keelastisan kayu, E_k = 10^5 kg/cm^2; Modulus keelastisan baja, E_b = 2,1 (10^6)kg/cm^2. Tegangan batas kayu, $\bar{\sigma}_k$ = 85 kg/cm^2; Tegangan batas

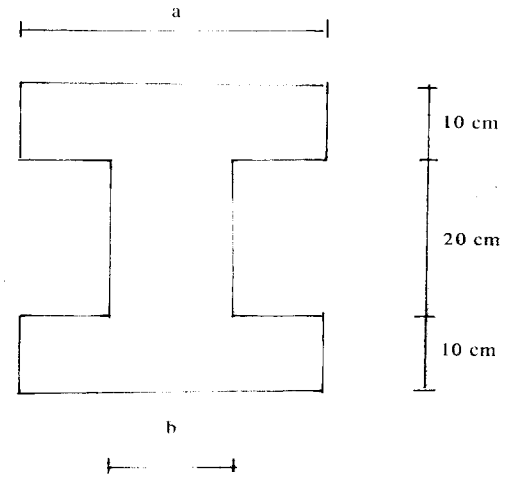
baja, $\bar{\sigma}_b$ = 1400 kg/cm^2. Tentukanlah tebal baja (=t) minimum agar syarat kekokohan yang diberikan terpenuhi.



Gambar C.

4. Penampang balok beton bertulang, berukuran 30 x 50 cm^2, menderita momen lentur positif M = 10^6 kgcm Modulus keelastisan beton, E_{beton} = 1,4 (10^5) kg/cm^2; Modulus keelastisan baja, E_{baja} = 2,1(10^6) kg/cm^2. Tentukanlah jumlah luas penampang tulangan tarik baja yang harus dipasang jika tegangan tekan batas beton akibat momen lentur adalah :
$\bar{\sigma}_{tk.lt.beton}$ = 60 kg/cm^2 dan tegangan batas baja akibat momen lentur adalah : $\bar{\sigma}_{baja}$ = 1400 kg/cm^2.

5. Sebuah penampang balok seperti terlihat dalam gambar D dirancangkan untuk menahan momen lentur positif dan negatif, yang diramalkan akan terjadi secara bergantian, masing-masing sebesar 3,5 ton meter. Bahan balok memiliki batas tegangan tekan sebesar 150 kg/cm^2 dan batas tegangan tarik sebesar 60 kg/cm^2. Tentukanlah besar a dan b pada balok tersebut agar kekuatan bahan termanfaatkan sepenuhnya.

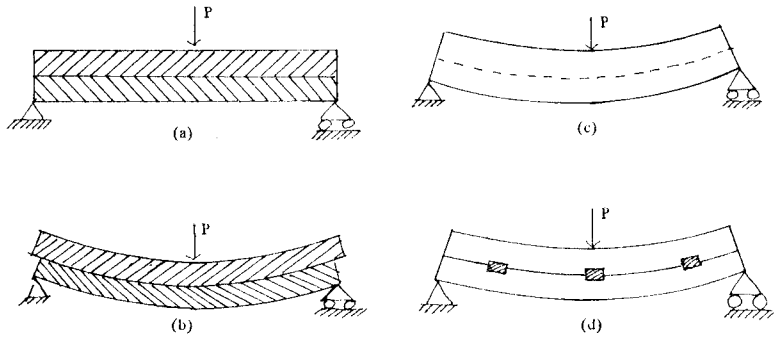


Gambar D.

5.5 Tegangan akibat gaya lintang :

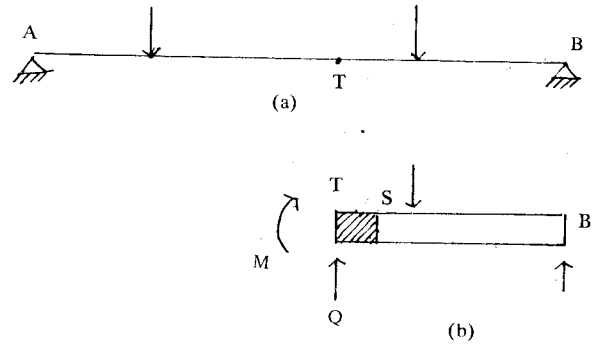
Perhatikanlah gejala yang terjadi pada dua buah balok tersusun yang memikul gaya seperti dalam gambar 5.5.1.a. Jika di antara kedua balok tersebut tidak ada gesekan (permukaan-sentuh licin sekali), setelah pembebanan terjadi mereka akan menjadi seperti dalam gambar 5.5.1.b, artinya, tidak timbul usaha saling menahan pergeseran yang terjadi di antara mereka, masing-masing melengkung secara bebas. Hal tersebut tidak terjadi pada balok utuh (gambar 5.5.1.c) atau pada balok susun yang pergeserannya dihalangi dengan klos-klos (gambar 5.5.1.d). Hal ini menunjukkan kita bahwa pada balok utuh telah terjadi sesuatu pada serat-seratnya

sehingga pergeseran di antara mereka tidak terjadi. Persisnya, pada serat-serat membujur balok telah terjadi tegangan yang kita sebut sebagai tegangan-geser, sehingga pergeseran di antara serat yang bersebelahan menjadi terhalang, berapa besar tegangan geser tersebut akan kita tentukan kemudian. Sementara itu perhatikanlah dulu raga lepas TB (gambar 5.5.2.b), dan untuk pembahasan selanjutnya akan kita tinjau kasus balok yang berpenampang epp.

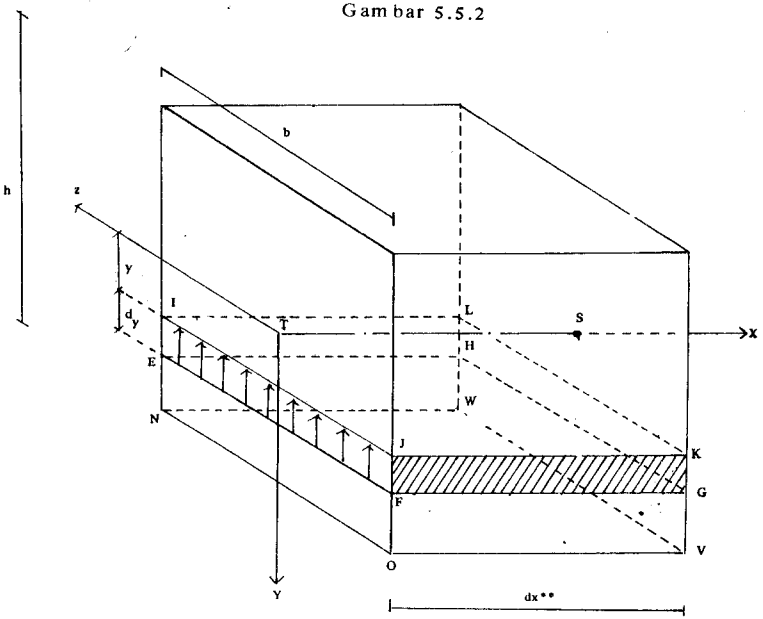


Pada penampang balok melalui T, akibat gaya-gaya vertikal pada raga lepas TB, haruslah ada tegangan yang bersifat sedemikian rupa sehingga resultannya mengimbangi gaya-gaya vertikal lainnya, dan resultan tegangan tersebut telah kita kenal sebagai gaya-lintang di T, sebutlah sebgai Q, dan arah tegangan tersebut kita andaikan vertikal, tentu saja.

Bagaimana penyebaran tegangan tersebut pada penampang melalui T tidak kita ketahui, sehingga, sebagaimana biasa, kita buatlah pengandaian sebagai berikut :



Gambar 5.5.2



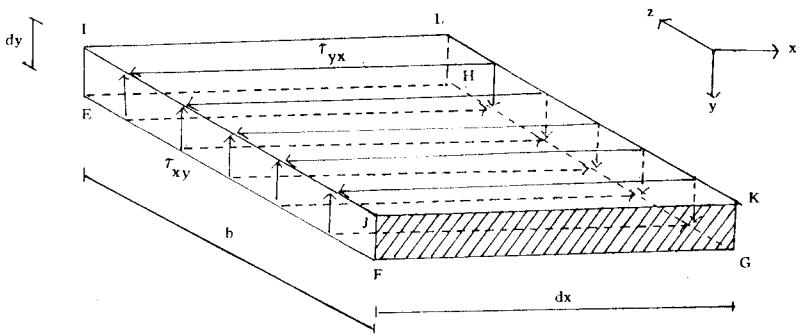
Gambar 5.5.3

** dx sengaja diperbesar agar gambar 5.5.3 tidak rumit.

Buatlah dulu sistem koordinat Kartesian dengan T sebagai pusatnya (gambar 5.3.3). Andaikan bahwa tegangan vertikal sepanjang lebar balok (b), sejauh y dari garis netral (sumbu Z) dan setebal dy bersifat seragam atau sama besar* (bidang EFIJ).

Sebutlah tegangan tersebut sebagai τ_{xy}, indeks x menunjukkan sumbu koordinat yang *tegaklurus* pada bidang tempat bekerjanya tegangan yang bersangkutan (dalam hal ini EFIJ), dan indeks y menunjukkan arah tegangan yang bersangkutan (dalam hal ini, sejajar sumbu Y).

Selanjutnya tinjaulah raga-lepas EFGHIJKL (gambar 5.5.4), ambillah momen pada garis GH.



Gambar 5.5.4

Akibat tegangan-tegangan τ_{xy}, momen yang terjadi tentulah

$$M_1 = (bdy)\,\tau_{xy}\,(dx) \qquad (5.5.1)$$

* Pengandaian tersebut umumnya membawa hasil yang mendekati hasil percobaan, asal saja tinggi balok h lebih besar daripada lebarnya (b<h).

Tetapi raga-lepas tersebut haruslah berada dalam keadaan seimbang, sehingga harus ada momen lain yang sama besar dan berlawanan arah dengan M_1 tersebut, sebutlah M_2, yang timbul akibat tegangan-tegangan yang terjadi pada bidang IJKL, yang sejajar dengan serat membujur balok, yang tidak lain adalah tegangan yang telah kita bicarakan sebelumnya, yakni tegangan yang menahan pergeseran antara serat-serat membujur balok. Dengan cara penamaan serupa, tegangan tersebut kita sebut τ_{yx}, sehingga kita peroleh :

$$M_2 = (dx\,dy)\,\tau_{yx}\,(b) \qquad (5.5.2)$$

Dengan menyamakan (5.5.1) dan (5.5.2) kita peroleh:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Selanjutnya, keseimbangan gaya-gaya vertikal pada raga-lepas tersebut memberikan kesimpulan bahwa pada bidang GHKL juga harus terjadi tegangan yang serupa tetapi berlawanan arah dengan tegangan pada bidang EFIJ, dan keseimbangan gaya-gaya horisontal menyimpulkan adanya tegangan yang serupa tetapi berlawanan arah dengan tegangan yang terjadi pada bidang IJKL, dan tentu bekerja pada bidang EFGH (gambar 5.5.4).

Sampai di sini, baiklah kita catat bahwa tegangan geser timbul secara berpasangan, yang satu (τ_{yx}) bekerja secara horisontal dan yang lainnya (τ_{xy}) bekerja secara vertikal; τ_{yx} berperan sebagai penghalang pergeseran antara serat-serat membujur yang bersebelahan (lihat penjelasan di muka), τ_{xy} berperan sebagai pengimbang gaya-gaya vertikal pada raga lepas TB, atau resultan τ_{xy} merupakan gaya lintang. Dan karena sifatnya yang selalu berpasangan serta sama besarnya, maka cukuplah kita ketahui salah satu di antara mereka.

Selanjutnya, mari kita tentukan besarnya τ_{yx} dengan menganggap bahwa pada kedua penampang yang terpisah

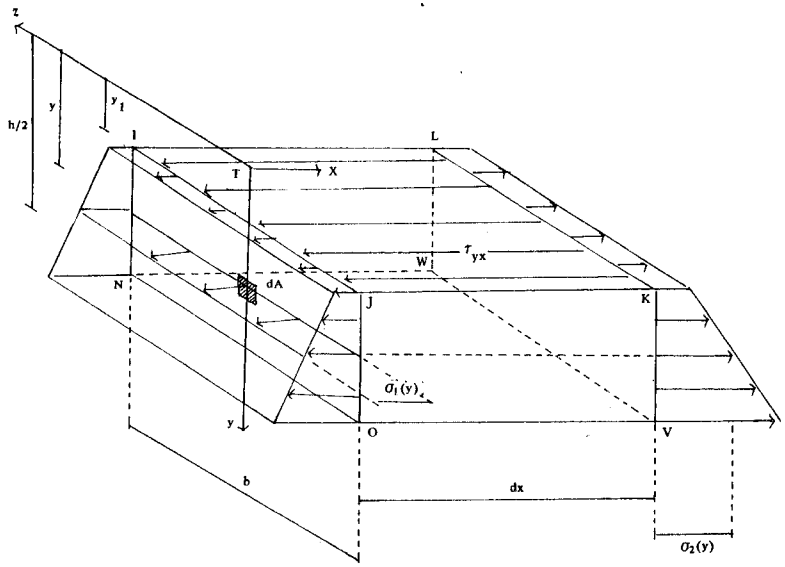
sejauh dx terjadi perbedaan momen lentur. Pada penampang melalui T (bidang NOIJ pada gambar 5.5.5) kita misalkan momen lenturnya sebesar M, dan pada penampang lainnya (bidang VWKL pada gambar 5.5.5) kita misalkan momen lenturnya sebesar M + dM, sehingga pada serat sejauh y dari bidang netral terjadi tegangan akibat M sebesar

$$\sigma_1(y) = \frac{My}{I_z} \qquad (5.5.3)$$

dan akibat momen lentur M + dM sebesar

$$\sigma_2(y) = \frac{(M + dM)y}{I_z} \qquad (5.5.4)$$

masing-masing pada penampang yang bersangkutan.



Gambar 5.5.5

Selanjutnya, tinjaulah raga-lepas NOVWIJKL (gambar 5.5.5). Pada bidang sejauh y dari bidang netral kita misalkan terjadi tegangan geser τ_{yx} sedangkan pada tepi bawah balok, tentu saja, tidak timbul gaya apapun juga.

Resultan tegangan akibat *momen lentur* M pada bidang NOIJ adalah :

$$F_1 = \int_{y_1}^{h/2} \frac{My}{I_z}\, dA \qquad (5.5.5)$$

Resultan tegangan akibat momen lentur M + dM pada bidang VWKL adalah :

$$F_2 = \int_{y_1}^{h/2} \frac{(M + dM)y}{I_z}\, dA \qquad (5.5.6)$$

Resultan tegangan geser pada bidang IJKL adalah :

$$F_3 = \tau_{yx}(b)(dx) \qquad (5.5.7)$$

Keseimbangan gaya-gaya horisontal mengharuskan dipenuhinya syarat $F_3 = F_2 - F_1$, sehingga kita peroleh :

$$\tau_{yx}(b)(dx) = \int_{y_1}^{h/2} \frac{dM\, y}{I_z}\, dA \qquad (5.5.8)$$

atau, karena I_z besaran yang tetap dan dM tidak bergantung pada luas dA, (5.5.8) dapat ditulis sebagai

$$\tau_{yx} = \left(\frac{dM}{dx}\right)\left(\frac{1}{b\, I_z}\right) \int_{y_1}^{h/2} y\, dA \qquad (5.5.9)$$

Tetapi, dari (2.5.2) kita tahu bahwa (dM/dx) = Q, gaya lintang di T, sehingga kita peroleh

$$\tau_{yx} = \frac{Q}{b\, I_z} \int_{y_1}^{h/2} y\, dA \qquad (5.5.10)$$

Selanjutnya, kita tahu bahwa integral pada ruas kanan rumus (5.5.10) tidak lain adalah momen luas bidang NOIJ terhadap garis netral penampang balok, sehingga jika momen

tersebut kita tandai dengan S, kita peroleh

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q\,S(y)}{b\,I_z} \qquad (5.5.11)$$

dengan :

τ_{xy} = tegangan geser pada serat sejauh y dari garis netral penampang balok, yang berarah *vertikal,* sejajar penampang yang bersangkutan.

τ_{yx} = tegangan geser pada serat sejauh y dari garis netral penampang balok, yang berarah sejajar sumbu horisontal balok, tegak lurus τ_{xy}.

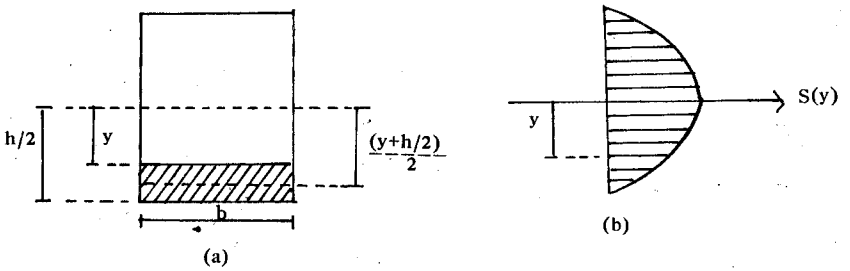
Q = gaya lintang pada penampang yang bersangkutan.

b = lebar balok

S(y)= momen luas bagian penampang yang dibatasi oleh tepi balok dan garis yang berjarak y dari garis netralnya, dan momen tersebut diambil terhadap garis netralnya.

Dengan cara serupa bisa diturunkan bahwa rumus (5.5.11) juga berlaku untuk tegangan geser yang terjadi pada serat-serat di atas garis netral. Dan dari pembahasan di atas juga jelas terlihat bagaimana hubungan antara momen lentur dengan gaya lintang. Antara lain dapat kita lihat bahwa jika dM, beda momen lentur antara kedua penampang yang terpisah sejauh dx, tetap harganya, tegangan geser yang bersangkutan menjadi nol, karena $(dM/dx) = Q = 0$, artinya gaya lintang yang bersangkutan nol. Dan dM tetap bisa berarti bahwa momen M = nol, ini kasus yang trivial, atau M tetap dan tidak nol, ini kasus momen lentur murni yang telah kita bahas pada bagian 5.1 di muka, artinya besar momen sama pada penampang-penampang yang bersangkutan.

Selanjutnya, S(y) yang merupakan fungsi y dapat kita tentukan sebgai berikut :



Gambar 5.5.6

Lihat gambar 5.5.6 momen luas bidang NOIJ terhadap garis netral adalah :

$$S(y) = (b)(h/2-y)(h/2+y)/2 = b/2(h^2/4-y^2) \qquad (5.5.12)$$

Jadi, S(y) merupakan fungsi parabola terhadap y (gambar 5.5.6.b),

$$S(y)_{maksimum} = \frac{bh^2}{8}, \quad \text{untuk } y = 0 \qquad (5.5.13)$$

Karena faktor Q, I_z dan b untuk penampang epp tetap harganya, maka diagram S(y) pada gambar 5.5.6.b dapat dipakai untuk mewakili diagram tegangan geser yang bersangkutan, dan dengan mudah dapat kita hitung bahwa tegangan geser maksimum,

$$\tau_{maksimum} = \frac{Qh^2}{8I_z}$$

Atau, karena $I_z = (1/12)bh^3$, kita peroleh

$$\tau_{maksimum} = \frac{3Q}{2bh} \qquad (5.5.14)$$

Dengan mudah juga bisa kita buktikan bahwa resultan tegangan geser pada penampang tegak balok akan sama dengan gaya lintang yang bersangkutan, cobalah

Contoh 5.5.A :

Sebuah balok yang berpenampang epp, tinggi 15 cm, menderita gaya lintang sebesar 2 ton. Jika tegangan geser yang diijinkan $\bar{\tau} = 20$ kg/cm^2, berapakah lebar balok yang memenuhi syarat kekokohan tersebut.

Solusi :

Dari rumus (5.5.14) kita peroleh pertidaksamaan

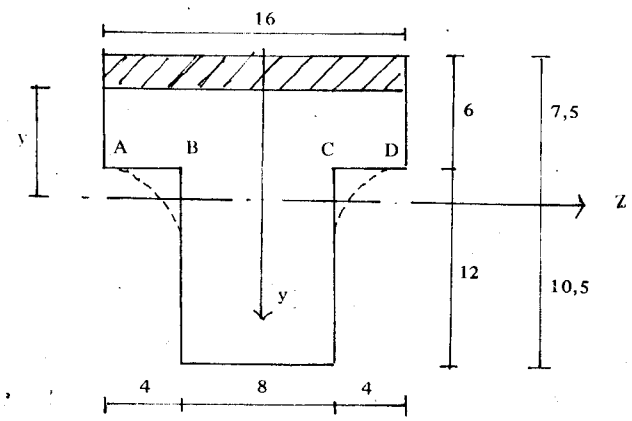
$$\tau_{maksimum} = \frac{3x2000}{2(b)(15)} \leqslant 20$$

atau, $b \geqslant 10$ cm.

Contoh 5.5.B :

Tentukanlah diagram tegangan geser pada penampang balok T dengan ukuran seperti pada gambar 5.5.B.1, dan berapakah tegangan geser maksimumnya jika gaya lintang sebesar 3 ton bekerja pada penampang tersebut.

Solusi :



Gambar 5.5.B.1

Letak garis netral dengan mudah dapat kita tentukan, yakni 10,5 cm dari tepi bawah balok. Selanjutnya kita tentukan dulu fungsi S (y) sebagai berikut :

Bagian penampang yang berukuran 16 x 6, atau $-7,5 \leqslant y \leqslant -1,5$,

$$S(y) = (16)\left|-7,5 - y\right|\left|\frac{-7,5+y}{2}\right|$$

$$S(y) = 8(56,25 - y^2) \qquad (5.5.B.1)$$

Bagian penampang yang berukuran 8 x 12, atau $-1,5 \leqslant y \leqslant 10,5$.

$$S(y) = (8)(10,5 - y)\left(\frac{10,5 + y}{2}\right)$$

$$S(y) = 4(110,25 - y^2) \qquad (5.5.B.2)$$

$I_Z = 1/12[(16)(6)^3+(8)(12)^3] + (16)(6)(4,5)^2 + (8)(12)(10,5)^2$

$= 5328$ cm^4

Karena lebar balok *tidak* selalu sama, maka S(y) tidak secara langsung dapat mewakili tegangan geser yang terjadi, faktor b pada pembagi menjadi berpengaruh, sehingga : untuk $-7,5 \leqslant y \leqslant -1,5$

$$\tau_{xy} = \frac{(3000)[8(56,25 - y^2)]}{(16)(5328)}$$

$$= 0,2815(56,25-y^2)$$

untuk $-1,5 \leqslant y \leqslant 10,5$

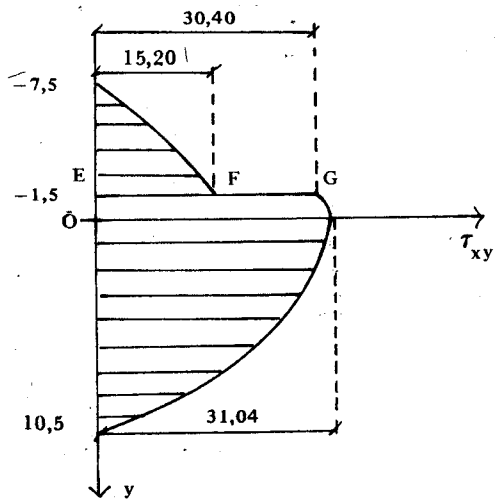
$$\tau_{xy} = \frac{(3000)[4(110,25 - y^2)]}{(8)(5328)}$$

$$\tau_{xy} = 0,2815(110,25 - y^2)$$

τ maksimum tentu terjadi pada garis netral, atau untuk $y = 0$, jadi,

$$\tau_{maksimum} = 31,04 \text{ kg/cm}^2.$$

Diagram tegangan geservya seperti pada gambar 5.5.B.2 :



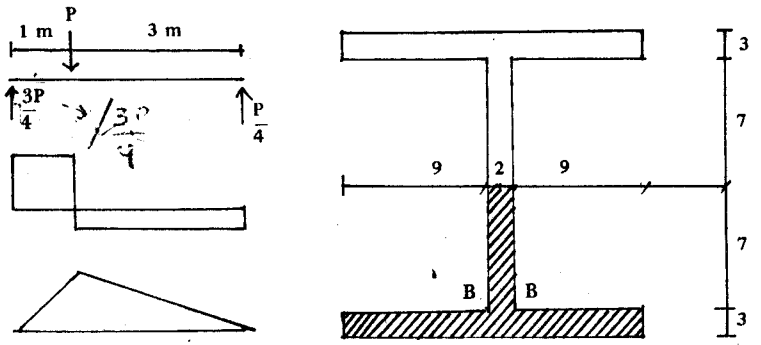
Gambar 5.5.B.2

Catatan :

Sebenarnya, bagian AB dan CD pada penampang balok (gambar 5.5.B.1) tidak dapat menahan tegangan geser, tetapi dalam perhitungan di atas telah kita andaikan bahwa distribusi tegangan geser pada seluruh penampang (meskipun terjadi penyempitan mendadak dari lebar AD menjadi BC) tidak berubah. Akibat pengandaian di atas, diagram tegangan geservya pun mengalami perbesaran mendadak (dari EF ke EG pada gambar 5.5.B.2), padahal perubahan pemusatan tegangan geser tersebut tidaklah begitu, tetapi lebih rumit. Meskipun kita tidak bermaksud menyelidikan nya lebih lanjut pada tahapan sekarang, namun perlu kita ketahui bahwa penambahan lekukan pada bagian tersebut (garis lengkung terputus-putus pada gambar 5.5.B.1) bertujuan untuk menghindari perubahan pemusatan tegangan yang terlalu mendadak.

Contoh 5.5.C :

Sebuah balok bertumpu di atas dua tumpuan yang berjarak 4 meter, penampang balok berbentuk I dengan ukuran seperti pada gambar 5.5.C.1, berat balok diabaikan. Batas tegangan tekan dan tarik, $\bar{\sigma}$ = 1400 kg/cm^2, batas tegangan geser $\bar{\tau}$ = 800 kg/cm^2. Berapakah batas beban terpusat P yang terletak 1 meter dari salah satu tumpuan yang masih dapat dipikul balok?



Gambar 5.5.C.1

Solusi :

Momen inersia penampang balok terhadap garis netral, $I_z = 1/12(20)(20)^3 - 2[1/12(9)(14)^3]$ cm^4 = 9217,333 cm^4
Momen maksimum, M = ¾P(100) = 75 P kgcm.
Gaya lintang maksimum, Q = ¾ P kg.
Syarat kekokohan terhadap momen :

$$\frac{75\ P\ (10)}{(9217{,}33)} \leqslant 1400$$

$$P \leqslant 17205{,}69 \text{ kg} \qquad (5.5.C.1)$$

Syarat kekokohan terhadap tegangan geser :

Mudah dibuktikan bahwa tegangan geser maksimum terjadi pada garis netral, dan momen luas bagian penampang yang diarsir (gambar 5.5.C.1) terhadap garis netral adalah 559 cm^3, sehingga tegangan geser maksimum :

$$\frac{(0{,}75P)(559)}{(2)(9217{,}33)} \leqslant 800$$

$$P \leqslant 35176{,}45 \text{ kg} \qquad (5.5.C.2)$$

Jelaslah (5.5.C.1) yang lebih menentukan batas P, sehingga haruslah $P \leqslant 17205{,}59$ kg.

Catatan :

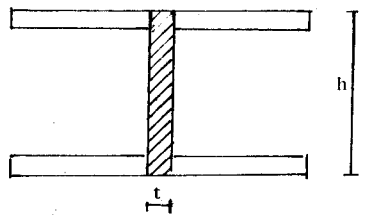
Penyelidikan mendalam terhadap balok dengan penampang berbentuk huruf I menunjukkan bahwa peranan 'sayap' (bagian yang tidak diarsir pada gambar 5.5.C.2) dalam penanggulangan geser sangat kecil, sehingga dalam perhitungan tegangan geser maksimum orang sering memakai rumus :

$$\tau_{maks} = \frac{Q}{th}$$

dengan :

Q = gaya lintang yang bersangkutan.

t dan h, lihat gambar 5.5.C.2 :



Gambar 5.5.C.2

Contoh 5.5.D :

Balok kayu terjepit sebelah memikul beban terpusat P di ujung bebasnya, jarak P ke ujung balok yang terjepit 2 meter. Penampang balok berbentuk epp dengan ukuran 10 x 20 cm^2, batas tegangan tarik dan tekan sama besar $\bar{\sigma} = 100$ kg/cm^2, batas tegangan geser, $\bar{\tau} = 20$ kg/cm^2. Abaikanlah berat balok dan tentukan beban P yang diijinkan.

Solusi :

Momen maksimum : M = P (200) kg cm

Gaya lintang maksimum : Q = P kg

Syarat kekokohan terhadap momen lentur :

$$\frac{(200\,P)(6)}{(10)(20)^2} \leqslant 100$$

$$P \leqslant 333{,}33 \text{ kg}$$

Syarat kekokohan terhadap tegangan geser :

$$\frac{3(P)}{2(10)(20)} \leqslant 20$$

$$P \leqslant 266{,}66 \text{ kg}$$

Jelaslah bahwa P harus lebih kecil daripada 266,66 kg.

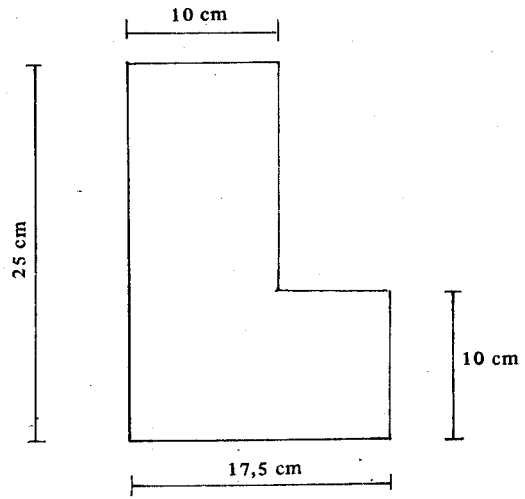
Catatan :

Dengan membandingkan solusi contoh 5.5.C dan 5.5.D kita dapatkan bahwa kekokohan terhadap momen lentur maupun kekokohan terhadap tegangan geser harus selalu ditinjau, keduanya bisa menjadi faktor yang menentukan.

5.5.SL SOAL LATIHAN

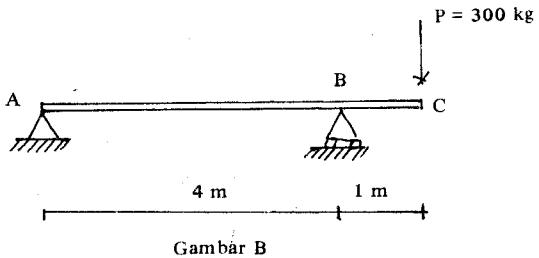
1. Penampang balok berbentuk epp, berukuran 12 x 20 cm^2. Tentukanlah gaya lintang terbesar yang boleh diderita penampang balok tersebut jika tegangan geser yang diijinkan $\bar{\tau} = 25$ kg/cm^2.

2. Tentukanlah diagram tegangan geser pada penampang balok L dengan ukuran seperti pada gambar A, dan berapakah tegangan geser maksimumnya jika gaya lintang sebesar 2 ton bekerja pada penampang tersebut.



Gambar A

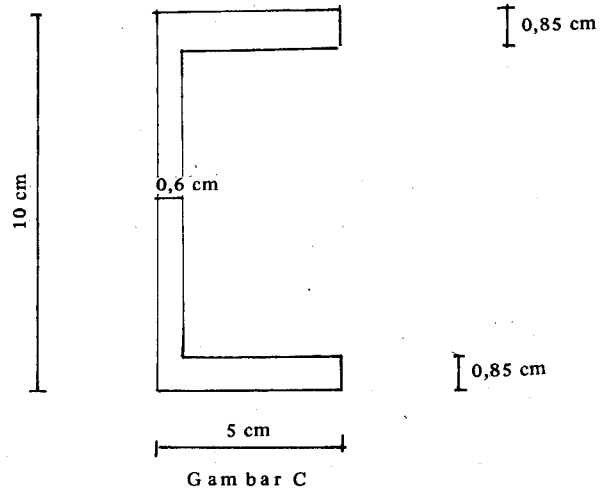
3. Balok ABC, berpenampang epp, lebarnya 12 cm, bertumpu pada sendi A dan rol B (gambar B). Batas tegangan tarik dan tekan balok sama besarnya, $\bar{\sigma} = 75$ kg/cm^2; Batas tegangan geser balok, $\bar{\tau} = 8$ kg/cm^2. Tentukanlah tinggi penampang balok minimum agar beban terpusat P = 300 kg dapat bekerja pada titik C. (Abaikanlah buat balok).



Gambar B

4. Berapakah beban P terbesar yang diijinkan bekerja di titik C pada balok ABC gambar B soal 3 jika tinggi penampang balok h = 20 cm ?

5. Sebuah balok panjangnya 4 m, bertumpu di atas tumpuan sendi dan rol pada kedua ujungnya. Penampang balok berbentuk huruf C seperti terlihat dalam gambar C. Beban terbagi rata q = 300 kg/m. bekerja di sepanjang balok, dan beban terpusat P = 1000 kg bekerja di suatu titik yang terletak pada jarak 1 m dari salah satu tumpuannya.
   a. Tentukanlah diagram tegangan geser pada penampang balok yang mengalami gaya lintang maksimum dan berapakah tegangan geser maksimum pada penampang tersebut.
   b. Berapakah batas beban P yang diijinkan jika batas tegangan tarik dan tekan balok $\bar{\sigma} = 1400$ kg/cm^2, serta batas tegangan geser balok $\bar{\tau} = 800$ kg/cm^2. (Beban terbagi rata q tetap bekerja).



Gambar C

* * *

BAB VI

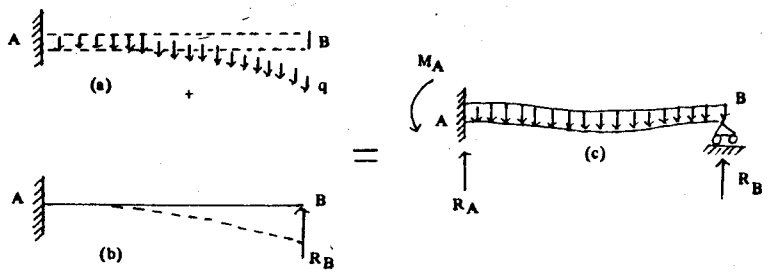
LENDUTAN BALOK AKIBAT MOMEN LENTUR

Pentingnya masalah lendutan dalam bangunan dengan segera bisa kita rasakan. Balok tangga misalnya, meskipun cukup kokoh namun lendutan yang terlalu besar bisa menyebabkan bahan pembungkusnya (plesteran) menjadi hancur. Tetapi bukan itu saja, lihatlah contoh sederhana berikut (gambar 6.0.1). Jika tidak ada rol B sebagai penyangga tentulah cantilever AB akan melendut seperti dalam gambar 6.0.1.a, rol B membuat lendutan balok AB lebih kecil, tetapi akibatnya timbullah tekanan pada rol B yang besarnya tentu harus dihitung. Nah di sini masalah lendutan juga memainkan peranan, karena persamaan kesetimbangan statikal saja yang jumlahnya hanya dua (jumlah gaya-gaya = 0 dan jumlah momen-momen gaya = 0) tidaklah cukup untuk menentukan 3 buah reaksi yang timbul, yakni gaya vertikal di A, momen jepit di A dan reaksi rol B. Bagaimana menghitung reaksi perletakan bangunan semacam itu, yang kita sebut sebagai *bangunan statik tidak tertentu**, merupakan salah satu tujuan kita. Tapi berhubung luasnya masalah bangunan statik tidak tertentu, kali ini cukuplah kita tinjau masalah tersebut hanya sebagai perkenalan.

Jadi, ada dua aspek yang berhubungan dengan masalah lendutan. Pertama, soal pembatasan lendutan yang diramalkan akan terjadi pada suatu bagian bangunan dan kedua, sebagai salah satu cara untuk memecahkan persoalan bangunan statik tidak tertentu. Tentang aspek pertama akan

* Bangunan statik tidak tertentu adalah bangunan yang reaksinya tidak bisa ditentukan hanya dengan persamaan kesetimbangan statikal saja (jumlah gaya = nol dan jumlah momen gaya = nol).

anda jumpai dalam beberapa Peraturan Konstruksi yang menentukan batas lendutan yang masih diperbolehkan terjadi pada pelbagai jenis dan bagian bangunan, sedangkan aspek kedua akan kita singgung sedikit dalam beberapa contoh. Tetapi sebelum kita pelajari perhitungan lendutan akibat *momen lentur,* baiklah kita catat bahwa perubahan bentuk yang disebabkan oleh *gaya lintang* pada gilirannya juga akan menambah lendutan balok, tetapi tambahan lendutan akibat gaya lintang tersebut umumnya sangat kecil sehingga bisa diabaikan.



Gambar 6.0.1

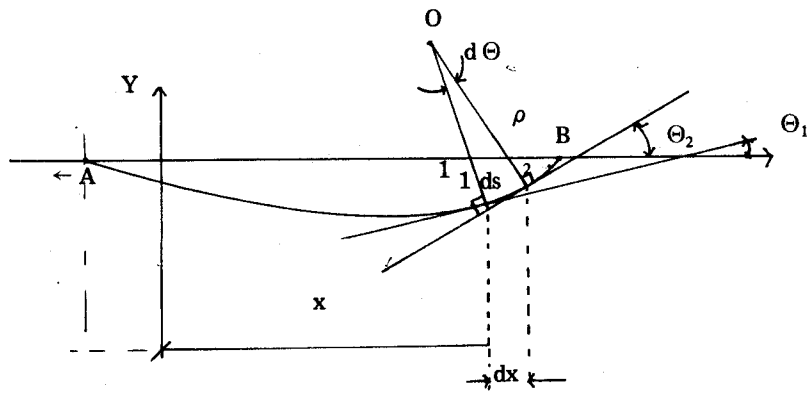
6.1 Cara Integral Lipat Dua :

Dalam uraian tentang tegangan akibat momen lentur murni telah kita dapatkan bahwa, jari-jari kelengkungan bidang netral (ρ) suatu balok prismatik yang menderita momen lentur murni M, ditentukan dengan

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E I_z} \qquad \text{[persamaan (5.1.7)]}$$

Seperti dalam penentuan tegangan akibat momen lentur "tak murni" (momen lentur tidak tetap pada setiap penampang), rumus di atas akan kita andaikan tetap berlaku bagi balok yang menderita momen lentur "tidak murni", dan akan kita gunakan sebagai dasar penurunan persamaan

lengkungan bidangnetral* balok, yang disebut sebagai *garis elastik* balok.



Gambar 6.1.1

Seperti biasa, buatlah dulu sistem koordinat Kartesian dan misalkan bahwa persamaan garis elastik balok AB sebagai y = f(x) (gambar 6.1.1). Selanjutnya tinjaulah dua buah titik yang terpisah sejauh dx, titik 1 dan titik 2, sebutlah panjang busur di antara keduanya sebagai ds. Tariklah garis singgung masing-masing di kedua titik tersebut. Jika beda sudut antara kedua garis singgung tersebut dengan sumbu X kita sebut $d\Theta$ ($= \Theta_2 - \Theta_1$), maka sudut yang terbentuk oleh kedua garis normal yang bersangkutan juga sama dengan $d\Theta$, dan mudah terlihat bahwa $ds = \rho d\Theta$, dengan ρ sebagai jari-jari kelengkungan elemen ds, atau

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\Theta}{ds} \qquad (6.1.1)$$

---

* Bidang netral balok kita gunakan sebagai wakil untuk menggambarkan kelengkungan balok seluruhnya, sehingga balok kita gambarkan sebagai garis yang merupakan perpotongan antara bidang netral dengan bidang gambar.

Dalam bangunan nyata, umumnya kelengkungan yang terjadi kecil sekali sehingga untuk penyederhanaan kita buat pendekatan sebagai berikut :

$$ds \approx dx$$

dan $$\Theta \approx \text{tg}\,\Theta = dy/dx$$

sehingga (6.1.1) menjadi :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \qquad (6.1.2)$$

Mengingat (5.1.7), persamaan (6.1.2) menjadi :

$$\frac{M(x)}{E\,I_z} = \frac{d^2y}{dx^2} \qquad (6.1.3)$$

M(x) adalah momen lentur pada titik yang bersangkutan (dalam hal ini titik 1), E adalah modulus keelastisan balok; I_z adalah momen inersia penampang balok terhadap garis netralnya.

Kelengkungan balok seperti dalam gambar 6.1.1 tentulah akibat momen positif (tepi bawah tertarik dan tepi atas tertekan). Dengan demikian telah kita dapatkan persamaan diferensial garis elastik balok akibat momen lentur, yakni pesamaan (6.1.3)*;

Untuk balok yang tipis, papan misalnya, pendekatan di atas tidak akan kita lakukan karena akan cukup jauh menyimpang dari kenyataan, dan rumus (6.1.3) tidak tepat lagi. Untuk itu kita tulis (6.1.1) sebagai :

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{d[\text{arc tg}(dy/dx)]}{dx}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)$$

* Di dalam beberapa buku, sumbu Y positif ditentukan ke bawah, berlawanan dengan yang kita tentukan, sehingga rumus yang digunakan adalah :

$$\frac{-M(x)}{E\,I_z} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1+(dy/dx)^2} \quad \frac{1}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}$$

Mengingat (5.1.7) akhirnya kita peroleh rumus yang lebih tepat :

$$\frac{M(x)}{E\,I_z} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}} \qquad (6.1.4)$$

Jika kita perbandingkan rumus pendekatan (6.1.3) dengan rumus (6.1.4) mudahlah disimpulkan bahwa rumus (6.1.3) juga dapat kita peroleh dari rumus (6.1.4) dengan mengabaikan faktor $(dy/dx)^2$nya, atau dengan kata lain, karena faktor tersebut jauh lebih kecil daripada 1, maka penyebut pada ruas kanan persamaan (6.1.4) dapat dianggap sama dengan 1.

Meskipun (6.1.4) lebih teltii namun dalam bangunan nyata rumus (6.1.3) sudah cukup memadai, di samping itu, pencarian solusi persamaan diferensial (6.1.3) jauh lebih mudah ketimbang persamaan diferensial (6.1.4). Oleh karena itu, selanjutnya (6.1.3) lah yang akan kita gunakan.

Contoh 6.1.A :

Balok prismatik AB sepanjang L yang terjepit sempurna di salah satu ujungnya memikul beban P di ujung lainnya. Tentukanlah persamaan garis elastiknya dan lendutan terbesarnya jika berat balok diabaikan.

Solusi :

Pilihlah sistem koordinat Kartesian seperti dalam gambar (6.1.A.1.c). Fungsi momen lenturnya adalah $M(x) = -P(L-x)$ sehingga persamaan diferensial garis elastiknya adalah :

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = -P(L-x) \qquad 0 < x < L$$

Pengintegralan pertama menghasilkan :

$$EI\ \frac{dy}{dx} = -PL\,x + \frac{P}{2}x^2 + C\ ;\quad 0 < x < L \qquad (6.1.A.1)$$

Untuk menentukan tetapan C kita gunakan syarat batas tumpuan jepit di A yang tidak memberikan kebebasan berputar kepada balok, hal ini berarti bahwa koefisien arah garis singgung pada garis elastik balok harus sama dengan nol, dan karena A merupakan ujung kiri selang berlakunya (6.1.A.1) maka syarat batas tersebut menjadi

$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, sehingga kita peroleh C = 0,

dan (6.1.A.2) menjadi :

$$EI\ \frac{dy}{dx} = -PLx + \frac{P}{2}x^2 \qquad o < x < L \qquad (6.1.A.2)$$

Integralkan sekali lagi akan kita peroleh :

$$E\,I\,y = -PL/2\,x^2 + P/6\,x^3 + D \qquad 0 < x < L \qquad (6.1.A.3)$$

Di A balok tidak melendut, sehingga syarat batas tersebut menjadi y = 0 untuk x = 0. Karena garis elastik balok kontinu di A, maka

$\lim_{x\to 0^+} y = 0$*

sehingga D = 0, dan (6.1.A.3) menjadi :

$$E\,I\,y = -PL/2\,x^2 + P/6\,x^3 \qquad 0 < x < L \qquad (6.1.A.4)$$

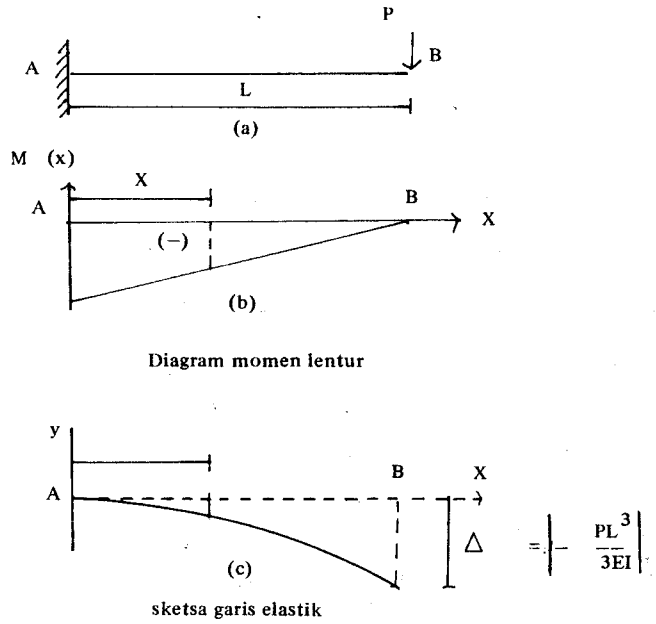
Tentu saja (6.1.A.4) berlaku juga untuk x = 0 dan x = L, sehingga akhirnya kita peroleh persamaan garis elastik balok :

$$E\,I\,y = -PL/2\,x^2 + P/6\,x^3 \qquad 0 \leqslant x \leqslant L \qquad (6.1.A.5)$$

Sketsa garis elastiknya dapat dilihat pada gambar 6.1.A.1.c dan lendutan terbesar terjadi di x = L dan kita tandai dengan Δ, yakni

$$\Delta = \left| -\frac{PL^3}{3EI} \right| \qquad (6.1.A.6)$$

Tanda "–" menunjukkan arah lendutan ke bawah dan dua garis di kanan kirinya menandakan harga mutlak.



Gambar 6.1.A.1

Catatan dan cara penulisan :

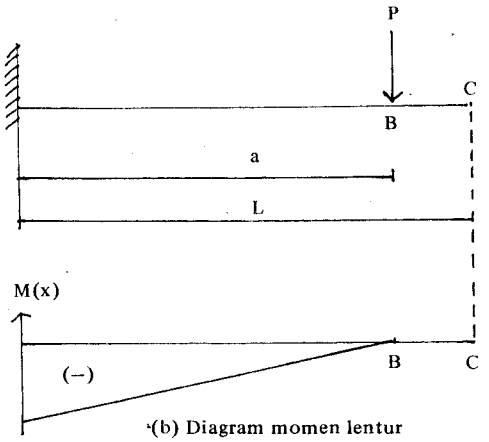
- $\lim_{x\to a^+} y$ artinya : limit y untuk x mendekati a dari kanan.
- $\lim_{x\to a^-} y$ artinya : limit y untuk x mendekati a dari kiri.
- Selanjutnya d^2y/dx^2 kita tulis y'' dan dy/dx kita tulis y'.

* Agar suatu fungsi f kontinu di X = a, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

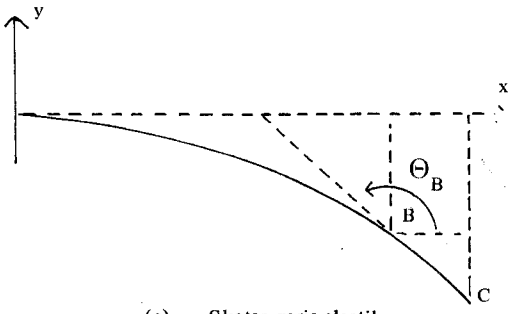
Contoh 6.1.B :

Balok prismatik AC sepanjang L yang terjepit sempurna di A memikul beban terpusat P di titik B, AB = a, dan BC =b. Tentukan persamaan garis elastik balok tersebut dan lendutan maksimumnya. Berat balok diabaikan.

Solusi :



(b) Diagram momen lentur



(c) Sketsa garis elastik

Gambar 6.1.B.1

Dari contoh 6.1.A kita tahu bahwa untuk bagian balok AB, $0 \leqslant x \leqslant a$, persamaan garis elastik balok AC akan serupa dengan persamaan garis elastik balok AB dalam contoh 6.1.A, karena keadaannya persis sama, sehingga kita peroleh :
untuk $0 \leqslant x \leqslant a$,

$$y = 1/EI(-P a/2\, x^2 + P/6\, x^3) \qquad (6.1.B.1)$$

Sedangkan bagian balok BC akan berbentuk lurus, karena tidak terjadi momen lentur pada bagian tersebut. Dan, persamaan garis elastiknya akan tergantung pada keadaan titik B, Koordinat titik B adalah (rumus 6.1.B.1) $B(a; -Pa^3/3)$. Sudut BC dengan sumbu X tentu sama dengan sudut garis singgung pada garis elastik balok bagian AB di B, atau dengan kata lain, fungsi garis elastik balok haruslah dapat diturunkan di titik B. Dan dari (6.1.A.2) kita peroleh :

$$\operatorname{tg} \Theta_B = \lim_{x \to a} y' = 1/EI\ (-Pa^2/2)$$

Alhasil, untuk $a \leqslant x \leqslant L$, persamaan garis elastiknya adalah :

$$E I y = -\frac{P a^3}{3} - \frac{P a^2}{2} (x-a)$$

Secara keseluruhan persamaan garis elastik balok menjadi :

$$E I y \begin{cases} = -\dfrac{Pa}{2}x^2 + \dfrac{P}{6}x^3 \ ; \ 0 \leqslant x \leqslant a \\ = -\dfrac{P a^3}{3} - \dfrac{P a^2}{2}(x-a) \ ; \ a \leqslant x \leqslant L \end{cases} \qquad (6.1.B.2)$$

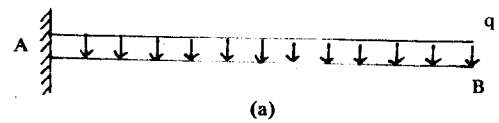
Sketsa garis elastik seperti pada gambar 6.1.B.1.c, dan lendutan maksimum terjadi di C, atau untuk x = L, yakni:

$$\Delta = \left| -\frac{P a^2}{6 E I}(3L - a) \right|$$

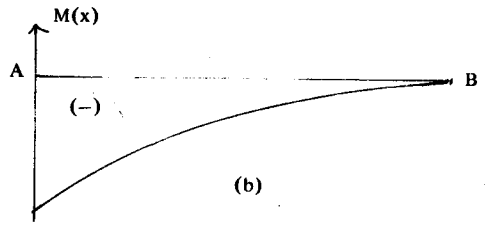
Contoh 6.1.C :

Balok prismatik AB sepanjang L terjepit sempurna di A dan memikul beban merata q pada seluruh panjangnya. Tentukan persamaan garis elastiknya dan lendutan maksimumnya.

Solusi :

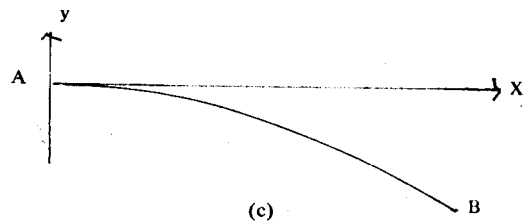


(a)



(b)

Diagram momen lentur



(c)

Sketsa garis elastis

Gambar 6.1.C.1

Persamaan momen lentur balok akibat beban merata q adalah : $M(x) = -\frac{1}{2}q(L-x)^2$, sehingga persamaan diferensial garis elastiknya menjadi :

$$EIy'' = -\tfrac{1}{2}q(L^2 - 2Lx + x^2) \qquad 0<x<L$$

$$EIy' = -\tfrac{1}{2}q(L^2 x - Lx^2 + x^3/3 + C) \qquad 0<x<L$$

Karena A terjepit, maka di A,

$$\lim_{x\to 0^+} y' = 0,$$

sehingga C = 0

Dengan pengintegralan sekali lagi kita peroleh :

$$EIy = -\tfrac{1}{2}q\left(\frac{L^2x^2}{2} - \frac{Lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} + D\right) \qquad 0<x<L$$

Karena di A balok terjepit, maka

$$\lim_{x\to 0} y = 0, \text{ sehingga } D = 0,$$

dan persamaan garis elastiknya menjadi :

$$EIy = -1/24\, q(6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4) \qquad 0\leqslant x\leqslant L \qquad (6.1.C.1)$$

Sketsa garis elastik seperti pada gambar 6.1.C.1.c, dan lendutan maksimum terjadi di B, x = L,

$$\Delta = \left| -\frac{1}{8 E I} qL^4 \right| \qquad (6.1.C.2)$$

Contoh 6.1.D :

Balok, prismatik AB sepanjang L yang bertumpu pada tumpuan sendi A dan rol B memikul beban merata q pada seluruh panjangnya. Tentukan persamaan garis elastiknya dan lendutan maksimumnya. Berat balok diabaikan.

Solusi :

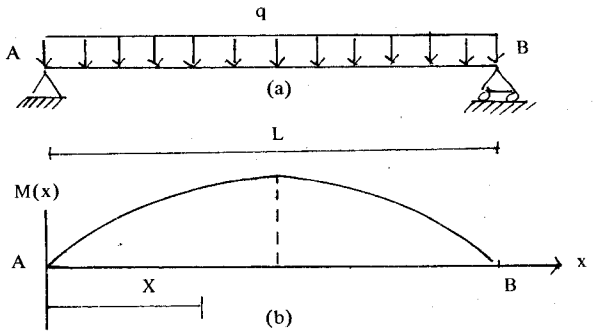
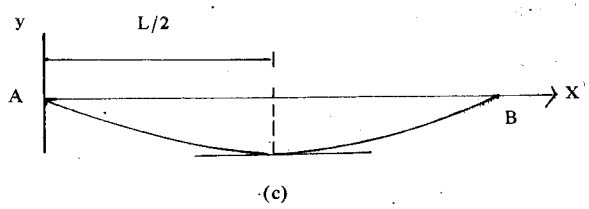


Diagram momen lentur



Sketsa garis elastik

Gambar 6.1.D.1

Fungsi momen lentur balok akibat beban merata q adalah :

$M(x) = \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{2}qx^2$

Sehingga persamaan diferensial garis elastiknya menjadi:

$E\,I\,y'' = \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{2}qx^2 \qquad 0<x<L$

Pengintegralan pertama menghasilkan :

$E\,I\,y' = \frac{1}{4}\,q\,L\,x^2 - 1/6\,q\,x^3 + C \;;\; 0<x<L \qquad (6.1.D.1)$

Integralkan sekali lagi kita peroleh :

$$E\,I\,y = \frac{1}{12}qLx^3 - \frac{1}{24}qx^4 + Cx + D \quad 0<x<L \qquad (6.1.D.2)$$

Syarat batas dalam persoalan ini adalah bahwa di kedua perletakannya balok tidak melendut, atau di $x = 0$ dan di $x = L$, $y = 0$.

Garis elastik balok kontinu, sehingga

$\lim_{x\to 0^+} y = 0$, akibatnya $D = 0$,

$\lim_{x\to L} y = 0$ akibatnya $C = -1/24\,q\,L^3$

Jadi, persamaan garis elastik balok adalah :

$E\,I\,y = 1/24\,q(2L\,x^3 - x^4 - L^3\,x) \qquad 0\leqslant x\leqslant L \qquad (6.1.D.3)$

Lendutan maksimum terjadi di tengah balok, atau di $x = L/2$, dan

$$\Delta = -\frac{5}{384\,EI}\,q\,L^4, \qquad (6.1.D.4)$$

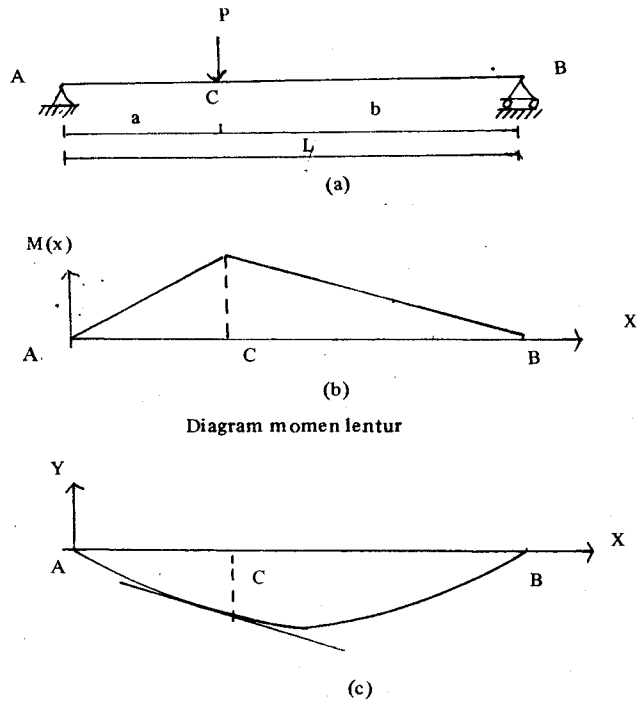
Catatan :

Untuk $x = L/2$, di tengah balok, $y' = 0$ karena balok dan pembebanannya bersifat simetrik terhadap titik tengah balok. Dengan demikian, tetapan C dapat juga kita tentukan dengan persamaan (6.1.D.2)

Contoh 6.1.E :

Balok prismatik AB sepanjang L yang bertumpu pada tumpuan sendi di A dan rol di B memikul beban terpusat P di C, AC = a dan CB = b. Tentukan persamaan garis elastiknya. Jika a = b, tentukanlah lendutan maksimumnya. Berat balok diabaikan.

Solusi :



Gambar 6.1.D.1

Fungsi momen lentur akibat beban terpusat P adalah:

Bagian AC, $0 \leq x \leq a$, $M(x) = \frac{P\,b}{L} x$

Bagian CB, $a \leq x \leq L$, $M(x) = \frac{P\,b}{L} x - P(x-a)$

Jadi pada bagian AC, persamaan diferensial garis elastiknya adalah :

$$E\,I\,y'' = \frac{P\,b}{L} x \qquad (6.1.E.1)$$

Integralkan (6.1.E.1.),

$$E\,I\,y' = \frac{P\,b}{2L} x^2 + C \qquad 0<x<a \qquad (6.1.E.2)$$

Integralkan (6.1.E.2)

$$E\,I\,y = \frac{P\,b}{6\,L} x^3 + C\,x + D \qquad 0<x<a \qquad (6.1.E.3)$$

Sebelum kita tentukan tetapan C dan D, marilah kita teruskan dulu dengan bagian CB,

$$E\,I\,y'' = \frac{P\,b}{L} x - P(x-a) \qquad a<x<L \qquad (6.1.E.4)$$

Integralkan (6.1.E.4),

$$E\,I\,y' = \frac{P\,b}{2\,L} x^2 - \frac{P}{2}(x-a)^2 + E \qquad a<x<L \qquad (6.1.E.5)$$

Integralkan (6.1.E.5),

$$E\,I\,y = \frac{P\,b}{6\,L} x^3 - \frac{P}{6}(x-a)^3 + E\,x + F \qquad a<x<L \qquad (6.1.E.6)$$

Syarat batas di kedua perletakannya adalah y = 0 untuk x = 0 dan x = L, dan garis elastik balok harus kontinu sehingga $\lim_{x\to 0^+} y = 0$ dan $\lim_{x\to L} y = 0$, melalui (6.1.E.3)

kita peroleh D = 0 dan melalui (6.1.E.6) serta mengingat (L−a) = b kita peroleh :

$$F = -\frac{P\,b\,L^2}{6} + \frac{P\,b^3}{6} - E\,L \qquad (6.1.E.7)$$

Selanjutnya, garis singgung pada garis elastik balok di manapun juga harus bersifat tunggal, dengan kata lain, balok tidak boleh putus dan tidak boleh patah atau, secara

maematik, fungsi garis elastik balok harus kontinu dan dapat diturunkan pada selang (0,L). Agar fungsi garis elastik balok dapat diturunkan di x = a ; $\lim_{x\to a^-} y' = \lim_{x\to a^+} y'$, dan dari (6.1.E.2) serta (6.1.E.5) kita dapatkan :

$$\frac{P\,b}{2L}a^2 + C = \frac{P\,b}{2L}a^2 + 0 + E$$

$$C = E$$

Agar fungsi garis elastik balok kontinu di x = a,

$$\lim_{x\to a^-} y = \lim_{x\to a^+} y,$$

dari (6.1.E.3) dan (6.1.E.6) serta mengingat D = 0 dan C = E, syarat tersebut menghasilkan :

$$\frac{P\,b}{6\,L}a^3 + E\,a = \frac{P\,b}{6\,L}a^3 + 0 + E\,a + F$$

sehingga F = 0, masukkan hasil ini ke dalam (6.1.E.7) kita peroleh :

$$E = \frac{P\,b}{6\,L}(b^2 - L^2)$$

Dengan demikian persamaan garis elastik balok telah kita peroleh, yakni :

$$E\,I\,y \begin{cases} = \dfrac{Pb}{6L}(x^3 + [b^2 - L^2]\,x) & 0 \leqslant x \leqslant a \\ \\ = \dfrac{P\,b}{6\,L}(x^3 + [b^2 - L^2)x] - \dfrac{P}{6}(x-a)^3 & a \leqslant x \leqslant L \end{cases} \qquad (6.1.E.8)$$

Penentuan lendutan ekstrim bisa kita lakukan dengan menggunakan turunan fungsi, asal hubungan a dengan b diketahui.

Selanjutnya lihatlah kejadian khusus jika P bekerja di tengah balok, atau jika a = b. Gantilah b dan a dengan L/2,

maka (6.1.E.8) menjadi :

$$E\,I\,y \begin{cases} = \dfrac{P}{48}(4x^3 - 3L^2\,x) & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{L}{2} \\ \\ = \dfrac{P}{48}(4[L-x]^3 - 3L^2\,[L-x]) & L/2 \leqslant x \leqslant L \end{cases} \qquad (6.1.E.9)$$

Lendutan terbesar akan terjadi di tengah balok, atau di x = L/2,

$$\Delta = \left| - \frac{P\,L^3}{48\,EI} \right| \qquad (6.1.E.10)$$

Contoh 6.1.F :

Hitunglah lendutan terbesar balok kayu yang panjangnya 3 meter, penampangnya berukuran 18 x 24 cm^2 dan modulus keelastisan E = 10^5 kg/cm^2, masing-masing untuk keadaan seperti dalam contoh 6.1.A,B,C,D dan E, jika beban P = 500 kg, beban merata q = 50 kg/m, dan a = b = 1,5 meter.

Solusi :

Momen inersia penampang balok, I =1/12(18)$(24)^3$ cm^4= 20736 cm^4

Untuk contoh 6.1.A :

$$\Delta = \left| - \frac{(500)(300)^3}{(3)(20736)(10^5)}, \text{cm} \right| = |-2{,}17| \text{ cm}$$

Untuk contoh 6.1.B :

$$\Delta = \left| - \frac{(500)(150)^2}{(20736)(10^5)} \left(\frac{150}{3} + \frac{150}{2}\right) \right| \text{cm}$$

$$= |-0{,}68| \text{ cm}$$

Untuk contoh 6.1.C :

$$\Delta = \left| - \frac{(0{,}5)(300)^4}{(8)(20736)(10^5)} \right| \text{cm} = |-0{,}24| \text{ cm}$$

Untuk contoh 6.1.D :

$$= | - \frac{(0{,}5)(300)^4}{(24)(20736)(10^5)} | \text{ cm}$$

$$= | - 0{,}08 | \text{ cm}$$

Untuk contoh 6.1.E :

$$= | - \frac{(500)(300)^3}{(48)(20736)(10^5)} | \text{ cm}$$

$$= | - 0{,}14 | \text{ cm}$$

Catatan :

Jangan terpukau oleh perhitungan yang mudah, usahakan untuk menangkap gambaran tentang ukuran lendutan terhadap beban dan ukuran baloknya serta sifat tumpuannya.

Contoh 6.1.G:

Balok prismatik AC bertumpu pada tumpuan sendi A dan rol B, jarak AB = L, bagian BC yang menjulur sepanjang a memikul beban P di C (gambar 6.1.G.1.a). Tentukan persamaan garis elastik balok AC dan lendutan ekstrimnya. Berat balok diabaikan.

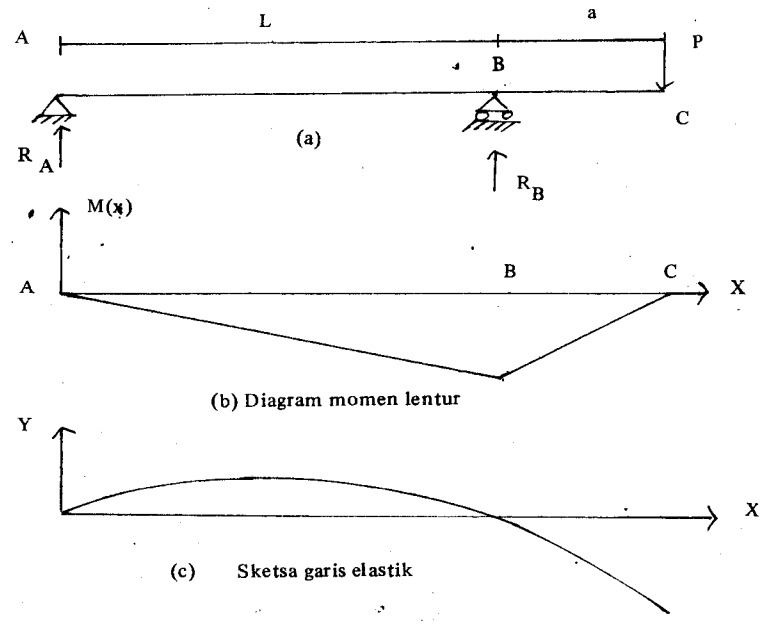
Setelah menghitung reaksinya, yakni

$$R_A = - \frac{P\,a}{L} \text{ dan}$$

$$R_B = P \left(1 + \frac{a}{L} \right),$$

fungsi momen lenturnya dapat kita tentukan dan persamaan diferensial garis elastik bagian AB :

$$E\,I\,y'' = - \frac{P\,a}{L} x \qquad 0 < x < L \qquad (6.1.G.1)$$



(b) Diagram momen lentur

(c) Sketsa garis elastik

Gambar 6.1.G.1

Integralnya (6.1.G.1),

$$E\,I\,y' = - \frac{P\,a}{2\,L} x^2 + C \qquad 0 < x < L \qquad (6.1.G.2)$$

Integralkan (6.1.G.2),

$$E\,I\,y = - \frac{P\,a}{6\,L} x^3 + C\,x + D \; ; \; 0 < x < L \qquad (6.1.G.3)$$

Gunakan syarat batas y = 0 untuk x = 0 dan x = L terhadap (6.1.G.3), dan syarat kekontinuan garis elastik balok, kita peroleh D = 0 dan $C = \frac{P\,a\,L}{6}$

sehingga persamaan garis elastik balok bagian AB :

$$E\,I\,y = - \frac{P\,a}{6\,L} (x^3 - L^2\,x) \; ; \; 0 \leqslant x \leqslant L \qquad (6.1.G.4)$$

Turunkan (6.1.G.4) terhadap x, kita dapatkan lendutan maksimum terjadi di x = L/3, dan akhirnya kita peroleh lendutan maksimum pada bagian AB sebesar :

$$\Delta_1 = \frac{P\,a\,L^2\,3}{27\,E\,I}, \text{ arahnya ke atas, tentu.} \qquad (6.1.G.5)$$

Selanjutnya marilah kita lihat bagian BC,

$$E\,I\,Y'' = -P(L + a - x) \qquad a < x < L+a \qquad (6.1.G.6)$$

Integralkan (6.1.G.6),

$$E\,I\,y' = -P(L + a)\,x - \frac{P}{2}x^2 + E \qquad (a < x < a+L$$

(6.1.G.7)

Dengan alasan yang sama seperti pada contoh 6.1.E, yakni garis singgung di B bersifat tunggal atau fungsi garis elastik dapat diturunkan di B, kita peroleh dari (6.1.G.4) dan (6.1.G.7) $\lim_{x \to L^-} y' = \lim_{x \to L^+} y'$ atau

$$-\frac{P\,a\,L}{3} = -P(a + L) - \frac{PL^2}{2} + E$$

$$E = \frac{P\,L}{6}(4a + 3L)$$

sehingga (6.1.G.7) menjadi :

$$E\,I\,y' = -P([L+a)x - P/2\,x^2 + PL/6[4a+3L]) \qquad a < x < a+L \qquad (6.1.G.8)$$

Integralkan sekali lagi kita peroleh :

$$E\,I\,y = -\frac{P(a+L)}{2}x^2 + \frac{P}{6}x^3 + \frac{PL}{6}(4a+3L)x + G, \qquad L < x < L + a$$

Di B, atau di x = L, lendutan tidak terjadi, y = 0, dan dari syarat kekontinuan garis elastik balok kita peroleh :

$$0 = -\frac{P(a+L)L^2}{2} + \frac{P\,L^3}{6} + \frac{P\,L^2}{6}(4a+3L)+G$$

$$G = -\frac{PL^2}{6}(a + L)$$

Sehingga persamaan garis elastik bagian BC menjadi :

$$E\,I\,y = -\frac{PL^2}{6}(a+L) + \frac{PL}{6}(4a+3L)x - \frac{P(a+L)}{2}x^2 + \frac{P}{6}x^3 \qquad L \leqslant x \leqslant L + a \qquad (6.1.6.9)$$

Alhasil persamaan garis elastik balok ABC dapat kita tulis sebagai berikut :

$$E\,I\,y \begin{cases} = -\frac{P\,a}{6\,L}(x^3 - L\,x) & 0 \leqslant x \leqslant L \\ = -\frac{PL^2}{6}(a+L) + \frac{PL}{6}(4a+3L)x - \frac{P(a+L)}{2}x^2 + \frac{P}{6}x^3 & a \leqslant x \leqslant L + a \end{cases} \qquad (6.1.G.10)$$

Dapat dibuktikan bahwa garis elastik bagian BC bersifat menurun, sehingga lendutannya berarah ke bawah karena di B lendutannya nol, dan lendutan maksimum di C bisa kita hitung dengan mengganti X = (a + L), yakni :

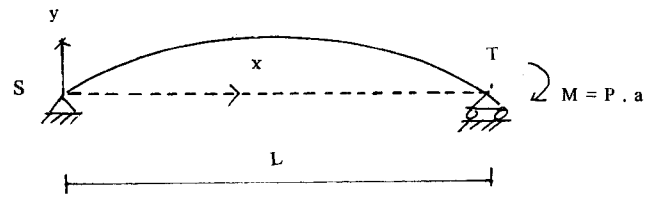
$$\Delta_2 = \left| -\frac{P(a+L)a^2}{3} \right| \qquad (6.1.G.11)$$

Catatan :

* Jika kita bandingkan balok bagian BC dengan balok terjepit sebelah seperti pada contoh (6.1.A), ternyata lendutan maksimum balok bagian BC lebih besar. Hal ini terjadi

karena balok bagian BC tidak terjepit sempurna di B; adanya kelonggaran berputar balok AC di titik B memungkinkan lendutan balok BC yang lebih besar, tentu saja. (Jika B jepit sempurna lendutan maksimum BC = $Pa^3/3$, lihat contoh 6.1.A).

* Garis elastik balok bagian AB akan persis sama dengan balok ST yang dibebani momen kopel M di ujungnya (gambar 6.1.F.2), dan persamaan garis elastik balok ST sama dengan persamaan garis elastik balok bagian AB pada contoh ini, tentu saja dengan mengganti Pa = M.



Gambar 6.1.G.2

Contoh 6.1.H.: Superposisi

Balok prismatik AB yang terjepit di A memikul beban merata q sepanjang AB dan beban terpusat P di ujung bebasnya, B. Tentukan persamaan garis elastiknya dan lendutan maksimumnya. Berat balok diabaikan.

Solusi :

Cara yang lazim ditempuh dalam memecahkan persoalan semacam ini adalah cara superposisi yang secara intuitif dapat kita tangkap melalui ilustrasi gambar 6.1.H.1.

Maksudnya adalah bahwa persamaan garis elastik akibat beberapa pembebanan (dalam contoh ini, beban P dan beban q) sama dengan jumlah persamaan-persamaan garis elastik yang diperoleh secara terpisah, akibat pembebanan-

pembebanan yang bersangkutan. Dalam contoh ini, persamaan garis elastik akibat beban terpusat P dan akibat beban merata q dapat kita peroleh secara berikut :
Akibat P, persamaan garis elastiknya adalah (6.1.A.1) :

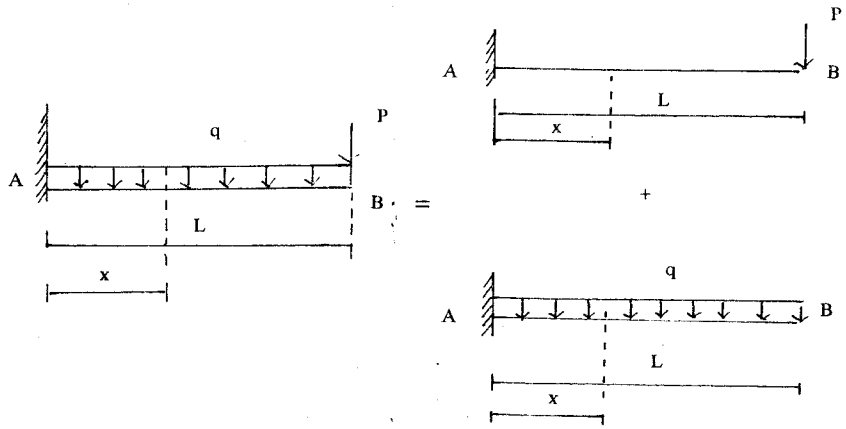
$$y = \frac{1}{EI}\left(-\frac{PL}{2}x^2+\frac{P}{6}x^3\right)$$

Akibat beban merata q, persamaan garis elastiknya adalah (6.1.C.1) :

$$y = -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}q\right)(6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4)$$

Akibat P dan q bersama-sama, persamaan garis elastiknya menjadi :

$$y = \frac{1}{EI}\left[\left(-\frac{PL}{2}x^2+\frac{P}{6}x^3\right)-\frac{1}{24}q(6L^2x^2-4Lx^3+x^4)\right] \qquad (6.1.H.1)$$



Gambar 6.1.H.1

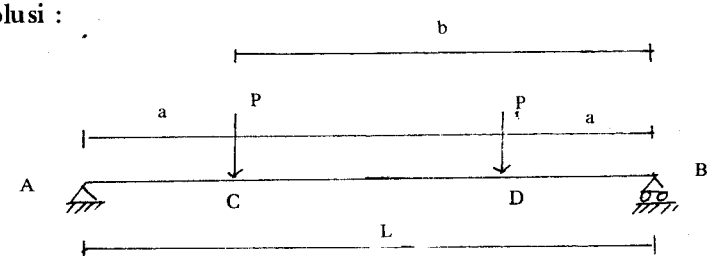
Tentu saja, hasil tersebut di atas (rumus [6.1.H.1]) dapat kita peroleh melalui jalan biasa, yakni melalui persamaan diferensial yang bersangkutan, namun cara seperti itu tidak praktis, terutama jika kita ingin mencari lendutan maksimumnya saja, karena dengan cara superposisi lendutan maksimumnya adalah :

$$\Delta = \left| -\frac{L^3}{EI}\left(\frac{P}{3} + \frac{1}{8}qL\right)\right| \qquad (6.1.H.2)$$

Contoh 6.1.I :

Tentukanlah persamaan garis elastik balok prismatik AB yang bertumpu pada sendi A dan rol B, panjangnya L dan beban P bekerja di C dan juga di D. AC=DB=a, berat balok diabaikan.

Solusi :



Gambar 6.1.I.1

Pada contoh 6.1.E, telah kita dapatkan bahwa persamaan garis elastik balok AB akibat beban P di C saja adalah (6.1.E.8) :

$$EIy \begin{cases} = \dfrac{Pb}{6L}(x^3 + [b^2 - L^2]x) & 0 \leqslant x \leqslant a \\ = \dfrac{Pb}{6L}(x^3 + [b^2 - L^2]x) - \dfrac{P}{6}(x-a)^3 & a \leqslant x \leqslant L \end{cases}$$

dengan : L panjang balok, a = AC dan b = L − a = CB

Dan akibat beban P di D saja, dengan AD = b, DB = a, tentulah persamaan garis elastiknya menjadi :

$$\frac{Pa}{6L}(x^3 + [a^2 - L^2]x) \qquad 0 \leqslant x \leqslant b$$

$$\frac{Pa}{6L}(x^3 + [a^2 - L^2]x) - \frac{P}{6}(x-b)^3 \qquad b \leqslant x \leqslant L$$

Mudah dibuktikan bahwa dalam contoh ini haruslah $b > a$. Dengan cara superposisi, persamaan garis elastik yang harus kita tentukan, adalah :

untuk $0 \leqslant x \leqslant a$:

$$EIy = \frac{Pb}{6L}(x^3 + [b^2 - L^2]x) + \frac{Pa}{6L}(x^3 + [a^2 - L^2]x)$$

$$= \frac{P}{6}x^3 - \frac{Pa}{2}(L-a)x \qquad (6.1.I.1)$$

untuk $a \leqslant x \leqslant b$

$$EIy = \frac{Pb}{6L}(x^3 + [b^2 - L^2]x) - \frac{P}{6}(x-a)^3 + \frac{Pa}{6L}(x^3 + [a^2 - L^2]x)$$

$$= \frac{P}{6}x^3 - \frac{Pa}{2}(L-a)x - \frac{P}{6}(x-a)^3$$

$$= \frac{Pa}{2}x^2 - \frac{PaL}{2}x + \frac{Pa^3}{6} \qquad (6.1.I.2)$$

untuk $b \leqslant x \leqslant L$

$$EIy = \frac{P}{6}x^3 - \frac{Pa}{2}(L-a)x - \frac{P}{6}(x-a)^3 - \frac{P}{6}(x-b)^3 \qquad (6.1.I.3)$$

A t a u, karena bentuk garis elastik bagian AC dan DB serupa, maka persamaan garis elastik bagian DB dapat juga

ditentukan berdasarkan (6.1.I.1), tentu saja x dalam (6.1.I.1) harus diganti dengan (L−x), sehingga kita peroleh :

untuk $b \leqslant x \leqslant L$,

$$E\,I\,y = \frac{P}{6}(L-x)^3 - \frac{P\,a}{2}(L-a)(L-x) \qquad (6.1.I.4)$$

Tentu saja (6.1.I.4) juga dapat diperoleh dari (6.1.I.3)

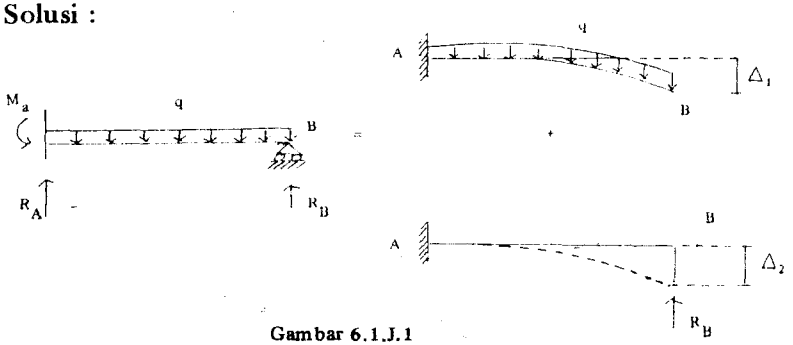
Lendutan terbesar akan terjadi di tengah balok, atau di $x = L/2$, dan besarnya adalah :

$$\Delta = \left| -\frac{P\,a\,L^2}{8\,E\,I} + \frac{P\,a^3}{6EI} \right| \qquad (6.1.I.5)$$

Contoh 6.1 : Contoh pencarian solusi bangunan statik tidak tertentu :

Sebuah balok prismatik AB memikul beban merata q pada seluruh panjangnya, ujung A terjepit sempurna dan ujung B bertumpu pada sebuah rol. Tentukanlah besar reaksi di A dan di B, jika berat balok diabaikan dan panjang AB = L.

Solusi :



Gambar 6.1.J.1

Lihat gambar 6.1.J.1, jika tidak ada rol di B, lendutan di B menurut contoh 6.1.C adalah :

$$\Delta_1 = \left| -\frac{1}{8\,E\,I}\,q\,L^4 \right| \qquad (6.1.J.1)$$

Akibat adanya rol B, titik B menjadi tidak melendut. Kejadian ini dapat kita pandang sebagai terjadinya lendutan yang sama besar tetapi dalam arah yang berlawanan, yang diakibatkan oleh reaksi R_B. Arah R_B harus ke atas, tentu. Dan dari contoh 6.1.A kita tahu bahwa lendutan di B akibat gaya R_B adalah :

$$\Delta_2 = \frac{R_B\,L^3}{3\,EI} \qquad (6.1.J.2)$$

Samakan ruas kanan (6.1.J.1) dengan ruas kanan (6.1.J.2), kita dapatkan :

$$R_B = \frac{3}{8}\,qL \qquad (6.1.J.3)$$

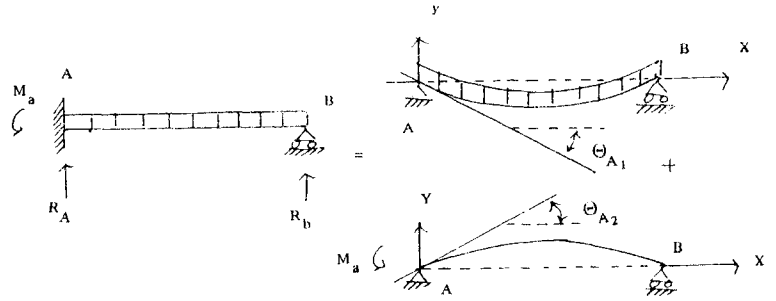
Ambil momen di titik A akan kita peroleh momen jepit di A sebesar :

$$M_A = \frac{1}{2}\,q\,L^2 - \frac{3}{8}\,q\,L^2 = \frac{1}{8}\,q\,L^2 \qquad (6.1.J.4)$$

Keseimbangan gaya-gaya vertikal mengharuskan

$$R_A = \frac{5}{8}\,q\,L \qquad (6.1.J.5)$$

Cara II :



Gambar 6.2.1.J.2

Lihat gambar 6.1.J.2. Berdasarkan jenis reaksi yang seharusnya timbul, bangunan tersebut dapat kita pandang sebagai balok yang bertumpu pada dua tumpuan sederhana di A dan di B, sedangkan reaksi M_A kita pandang sebagai momen gaya yang bekerja pada balok AB. Syarat yang harus dipenuhi dalam hal ini adalah bahwa garis singgung pada garis elastik balok di titik A akibat beban merata q dan M_A bersifat mendatar, atau koefisien arah garis singgungnya nol, karena A seharusnya merupakan tumpuan jepit sempurna.

Dari contoh 6.1.D kita tahu bahwa akibat beban merata q persamaan garis elastik balok AB adalah :

$$E I y = 1/24\ q(2L x^3 - x^4 - L^3 x)$$

Turunkan terhadap x, dan ambil limitnya untuk $x \to 0^+$, kita peroleh koefisien arah garis singgung di A, yakni

$$\text{Tg}\ \Theta_{A_1} = -\frac{1}{24\ EI} q L^3 \qquad (6.1.J.6)$$

Dari contoh 6.1.G kita tahu bahwa akibat momen M_A = Pa di titik B (lihat catatan dan gambar 6.1.G.2 dan rumus [6.1.G.4]), persamaan garis elastik balok AB adalah :

$$E I y = -\frac{M_A}{6L}(x^3 - L^2 x)$$

Karena letak momen yang tidak sama, $\text{tg}\ \Theta_{A_2}$ (gambar 6.1.J.2) yang kita perlukan tentulah sama dengan $-\ \text{tg}\ \Theta_B$ dalam contoh 6.1.G, dan setelah menurunkan (6.1.J.7) terhadap x serta mengambil limitnya untuk $x \to L^-$, kita dapatkan :

$$\text{tg}\ \Theta_B = -\frac{M_A L}{3\ E I}$$

jadi,

$$\text{tg}\ \Theta_{A_2} = -\text{tg}\ \Theta_B = \frac{M_A L}{3EI} \qquad (6.1.J.8)$$

Agar garis singgung pada garis elastik di A, akibat q dan M_A bersifat mendatar, maka

$$\text{tg}\ \Theta_{A_1} = -\ \text{tg}\ \Theta_{A_2}$$

dan dari (6.1.J.6) dan (6.1.J.8) akhirnya kita peroleh :

$$M_A = 1/8\ q\ L^2$$

Setelah M_A diketahui, reaksi lainnya tentu dapat ditentukan berdasarkan persamaan keseimbangan statik, karena jumlah reaksi yang tidak diketahui tinggal dua buah.

Catatan :

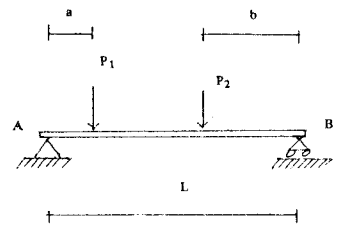
* Cara pemecahan di atas dikenal sebagai cara Perubahan-bentuk Taat-asas (consistent deformation), dan merupakan salah satu cara yang sering digunakan dalam pemecahan bangunan statik tidak tertentu, yakni bangunan yang jumlah reaksinya melebihi jumlah persamaan keseimbangan statik yang dua buah itu. Sedangkan banyaknya reaksi kelebihan yang bersangkutan kita sebut sebagai *derajat ketidaktentuan.* Dalam contoh 6.1.J ini jumlah reaksinya ada tiga, yakni R_A, R_B dan M_A, jadi derajat ketidaktentuannya satu, sedangkan reaksi kelebihan yang bersangkutan boleh dipilih, atau R_B atau M_A.

* Dalam contoh ini terlihat bahwa lendutan balok bukan satu-satunya hal yang perlu kita ketahui, *kelandaian* atau koefisien arah garis singgungnya juga perlu diketahui. Di samping itu, untuk memecahkan masalah statik tidak tertentu kita tidak membutuhkan persamaan garis elastik balok seluruhnya, yang kita perlukan hanyalah besar lendutan dan atau kelandaian balok di titik-titik tertentu saja, sehingga cara yang lebih mudah dan cepat untuk itu perlu dipelajari. Salah satu cara yang akan kita bahas adalah cara Bidang Momen (Moment Area Method), yang bukan saja

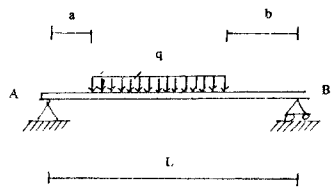
merupakan dasar pengembangan Cara Balok Sekawan (conjugate-beam Method), yang ampuh dalam perhitungan lendutan dan kelandaian balok, tetapi bahkan dapat digunakan secara langsung untuk memecahkan masalah bangunan statik tidak tertentu.

6.1.SL SOAL LATIHAN

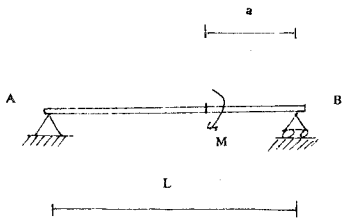
1. Tentukanlah persamaan garis elastik dan lendutan maksimum masing-masing balok prismatik dalam gambar A, B, C, D, E, F dan G. Abaikanlah berat balok.



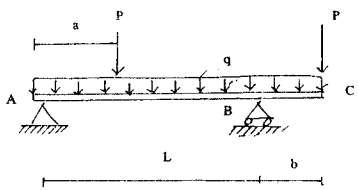
Gambar A



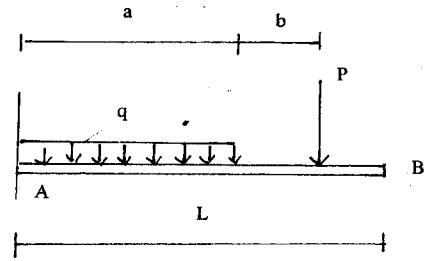
Gambar B



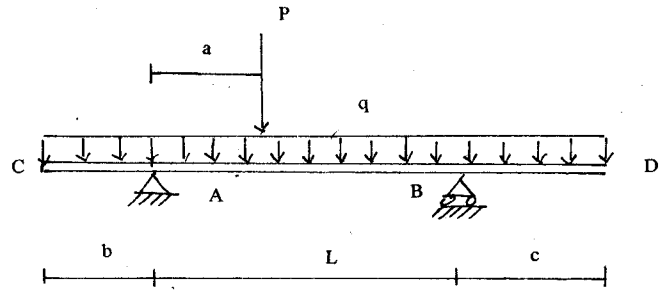
Gambar C



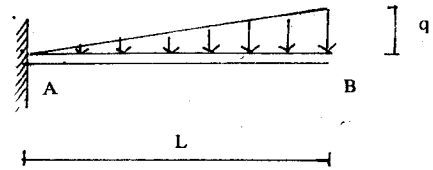
Gambar D



Gambar E



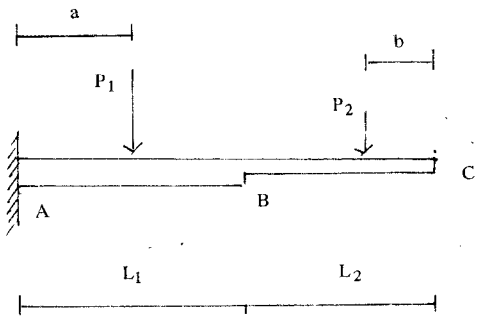
Gambar F



Gambar G

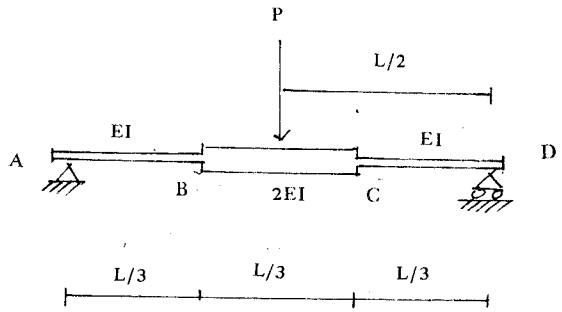
2. Tentukanlah lendutan maksimum balok CABD dalam gambar E jika : Balok terbuat dari kayu, E kayu = 10^5 kg/cm^2, dan ukuran penampangnya 15 x 25 cm^2; Beban yang bekerja adalah P = 300 kg dan q = 30 kg/m'; Panjang balok adalah b = 1 m, L = 4 m dan C = 1,5 m.

3. Balok ABC terjepit sempurna di A dan memikul beban terpusat P_1 dan P_2 seperti terlihat dalam gambar H. Faktor kekakuan balok terhadap momen lentur sepanjang bagian BC adalah EI dan sepanjang bagian AB adalah 2EI. Tentukanlah persmaan garis elastik balok ABC dan berapakah lendutan maksimumnya. (Berat balok diabaikan).



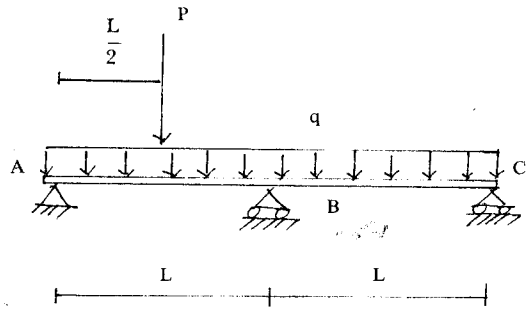
Gambar H

4. Balok ABCD di atas tumpuan sendi dan rol (gambar I). Faktor kekakuan balok di sepanjang bagian AB dan CD masing-masing adalah sebesar EI; Sedangkan di sepanjang bagian BC adalah sebesar 2 EI. Tentukanlah persamaan garis elastik balok dan lendutan maksimumnya. (Abaikanlah berat balok).



Gambar I

5. Tentukanlah reaksi-reaksi tumpuan bangunan statik tidak tertentu dalam gambar J.



Gambar J

6.2 Cara Bidang Momen :

Cara yang akan dibahas di bawah ini sebenarnya merupakan penafsiran ilmu ukur terhadap solusi persamaan diferensial garis elastik suatu balok.

Seperti telah dibahas pada bagian awal bab ini, dalam penurunan persamaan diferensial garis elastik balok, beberapa pendekatan telah kita lakukan, yakni sudut yang di-

bentuk oleh garis singgung pada garis elastik balok kita dekati dengan tangensnya, dan elemen busur ds kita dekati dengan dx. Pada cara Bidang Momen, pendekatan $\Theta = \approx dy/dx$ tidak kita perlukan tetapi $ds \approx dx$ tetap kita pertahankan, sehingga persamaan yang tadinya :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

menjadi :

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \qquad (6.2.1)$$

Selanjutnya sudut garis singgung pada garis elastik balok dengan sumbu X, Θ akan kita sebut dengan istilah kelandaian (slope).

Jika Θ_D dan Θ_C masing-masing merupakan kelandaian balok di titik-titik D dan C, dan absisnya masing-masing $x = c$ dan $x = d$, dengan $d > c$, maka dari (6.2.1) akan kita peroleh :

$$\Theta_D - \Theta_C = \int_c^d \frac{M(x)}{EI}\, dx \qquad (6.2.2)$$

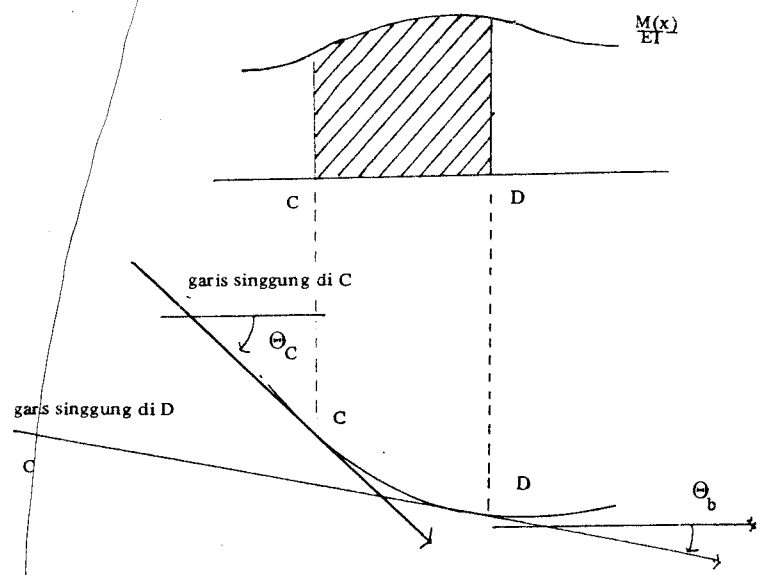
Ruas kanan (6.2.2) jelas merupakan luas bidang yang dibatasi oleh garis-garis vertikal melalui C dan D, sumbu X serta grafik fungsi momen lentur M (x) dibagi EI (gambar 6.2.1).

Penafsiran ilmu ukur terhadap persamaan (6.2.2) dikenal sebagai :

Teorema I Cara Bidang Momen :

Beda kelandaian antara dua titik C dan D pada garis elastik balok sama dengan luas bidang yang dibatasi oleh garis-garis vertikal melalui C dan D, grafik fungsi momen lentur M(x) per EI serta sumbu X.

Perhatikan perumusan matematik Teorema I tersebut yang dinyatakan oleh rumus (6.2.2). Jika fungsi momen lentur per EI serta absis titik C dan D diketahui, ruas kanannya mudah dihitung, tetapi hasilnya hanyalah menunjukkan beda kelandaian di C dan di D, jadi untuk mengetahui kelandaian di titik D harus kita ketahui dulu kelandaian di titik C, dan sebaliknya. Nah, kasus yang termudah adalah jika salah satu titik memiliki kelandaian nol, yakni jika salah satu titik merupakan tumpuan jepit atau titik tengah balok yang dibebani secara simetrik. Dalam hal semacam itulah Teorema I Cara Bidang Momen ini sering digunakan orang.



Gambar 6.2.1

Contoh 6.2.A :

Balok prismatik AB sepanjang L yang terjepit sempurna di A memikul beban P di ujung bebasnya, B. Tentukan kelandaian di B jika berat balok diabaikan.

Solusi :

Tentukan dulu diagram momen lenturnya (gambar 6.2.A.1.b). Menurut Teorema I, beda kelandaian titik A dan B adalah :

$$\Theta_B - \Theta_A = \tfrac{1}{2}(L)\left(-\frac{PL}{EI}\right) = -\frac{PL^2}{2EI}$$

$$\Theta_B - 0 = -\frac{PL^2}{2EI}$$

$$\Theta_B = -\frac{PL^2}{2EI}$$

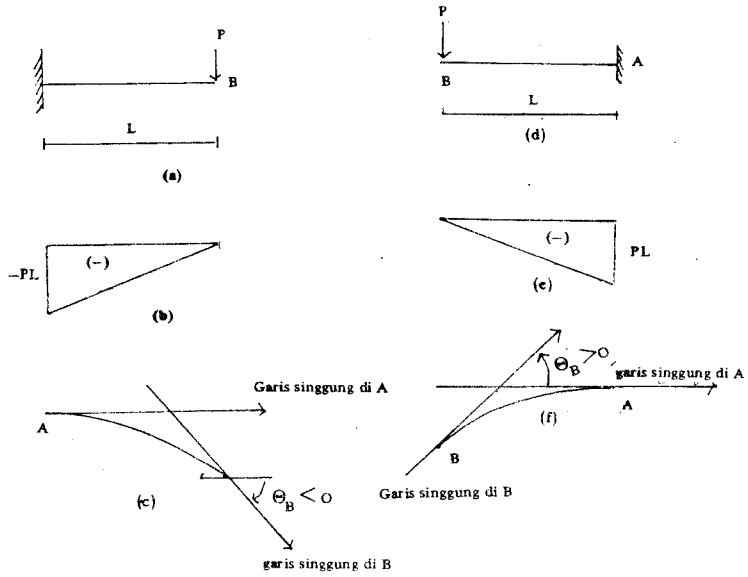
Jika gambar keadaan yang digunakan seperti gambar 6.2.A.1.d maka persamaan yang kita peroleh menjadi :

$$\Theta_A - \Theta_B = -\frac{PL^2}{2EI}$$

$$0 - \Theta_B = -\frac{PL^2}{2EI}$$

$$\Theta_B = +\frac{PL^2}{2EI}$$

Perhatikan urutan perjanjian penulisan, yang kanan dikurangi yang kiri sama dengan luas bidang yang bersangkutan, dan momen lentur negatif tetap ditulis negatif, demikian pula untuk momen lentur positif tetap diberi tanda positif. Sedangkan kelandaian suatu titik ditafsirkan sesuai dengan tangensnya (lihat gambar 6.2.A.1)



Gambar 6.2.A.1

Contoh 6.2.B :

Balok prismatik AB yang bertumpu pada sendi di A dan rol di B memikul beban merata q pada seluruh panjangnya, L. Tentukan kelandaian balok AB di ujungnya.

Tentukan fungsi momen lentur per EI, yakni :

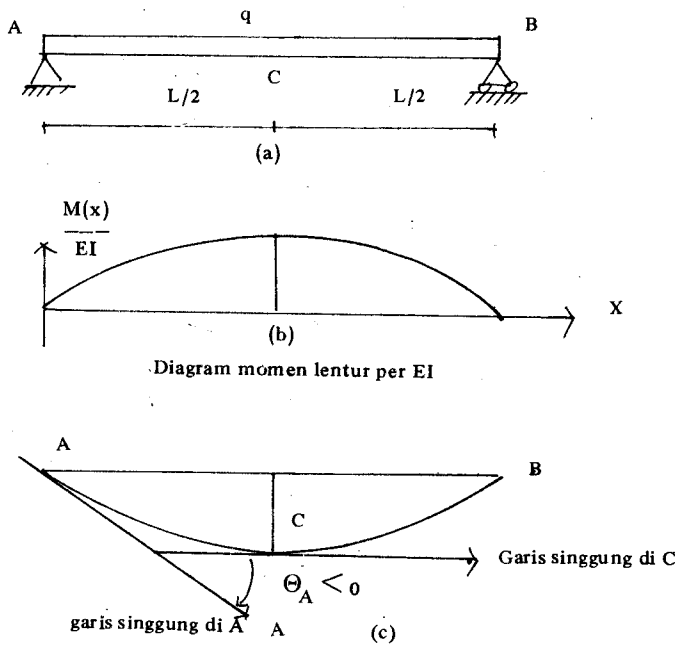
$$\frac{M(x)}{EI} = \frac{1}{2EI}\, q(L\,x - x^2)$$

Menurut teorema I atau rumus (6.2.2) beda kelandaian C (tengah-tengah balok) dengan ujung A adalah :

$$\Theta_C - \Theta_A = \int_0^{L/2} \frac{1}{2\,EI}\, q(Lx - x^2)dx$$

$$\Theta_C - \Theta_A = \frac{1}{24\,EI}\, qL^3 \qquad (6.2.B.1)$$

Solusi :



Gambar 6.2.B.1

Tetapi, karena pembebanan dan balok simetrik terhadap C, maka $\Theta_C = 0$, sehingga dari (6.2.B.1) kita dapatkan :

$$0 - \Theta_A = \frac{1}{24\,EI} q\,L^3, \text{ atau}$$

$$\Theta_A = -\frac{1}{24\,EI} q\,L^3$$

Dengan cara yang sama akan kita peroleh :

$$\Theta_B = +\frac{1}{24\,EI} q\,L^3$$

Contoh 6.2.C : Penerapan Cara Bidang Momen pada bangunan statik tidak tertentu.

Balok prismatik AB sepanjang L yang terjepit di kedua ujungnya memikul beban terpusat P di tengahnya. Tentukan semua reaksi bangunan tersebut jika berat balok diabaikan.

Solusi :

Dalam pencarian solusi soal ini akan kita gunakan Teorema I Cara Bidang momen, prinsip dasarnya adalah bahwa di kedua ujung balok kelandaiannya sama dengan nol, sehingga perbedaan kelandaiannya juga sama dengan nol.

Sebagaimana bisa diduga, karena pembebanan yang diberikan, tentulah momen reaksi di A dan di B sama besarnya dan keduanya bersifat negatif terhadap balok AB (gambar 6.2.C.1.c), sehingga jika momen tersebut kita namakan – M, maka luas bidang momen per EI akibat kedua momen tersebut (antara A dan B) adalah :

$$L_M = (-\frac{M}{EI})(L) \qquad (6.2.C.2)$$

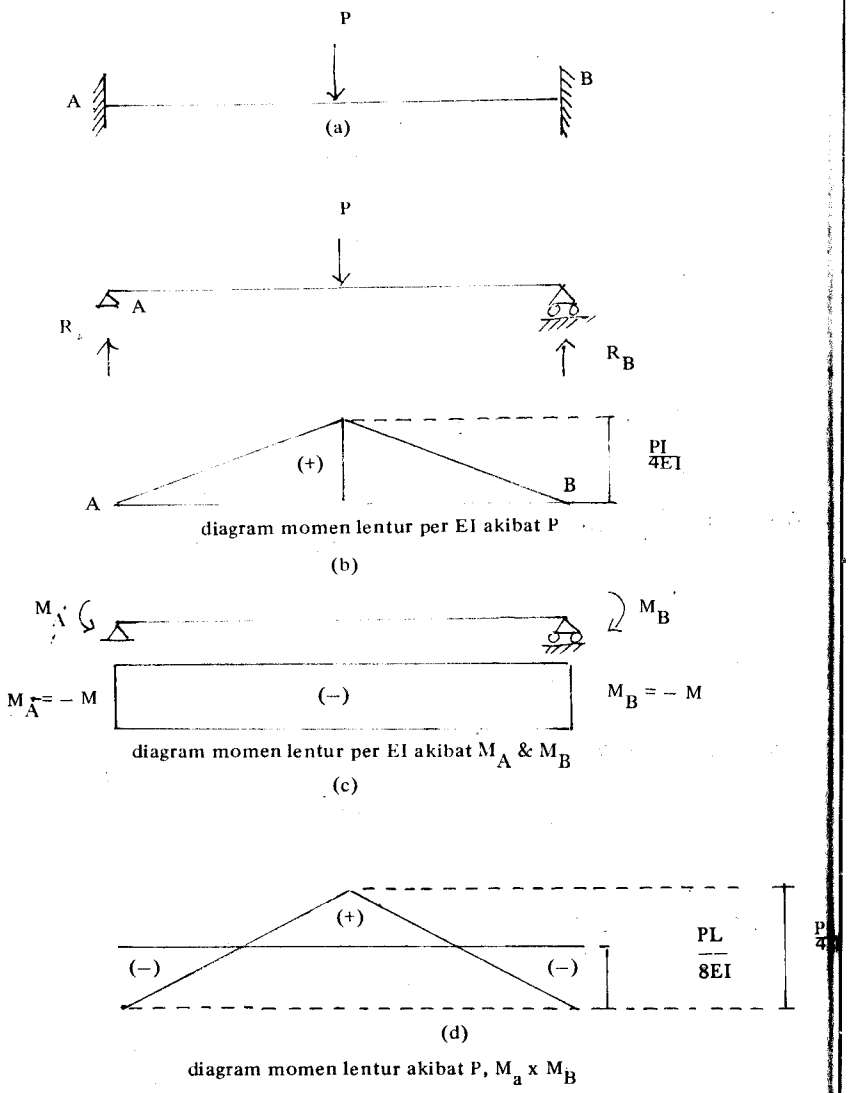
Dan akibat P, luas bidang momen per EI yang bersangkutan (gambar 6.2.C.1.b) adalah :

$$L_P = \tfrac{1}{2}(\frac{PL}{4EI})(L) \qquad (6.2.C.2)$$

Beda kelandaian antara titik A dan titik B akibat – M dan P sama dengan nol, sehingga dari (6.2.C.1) dan (6.2.C.2) kita peroleh :

$$0 = (-\frac{M\,L}{EI}) + \frac{P\,L^2}{8\,EI}$$

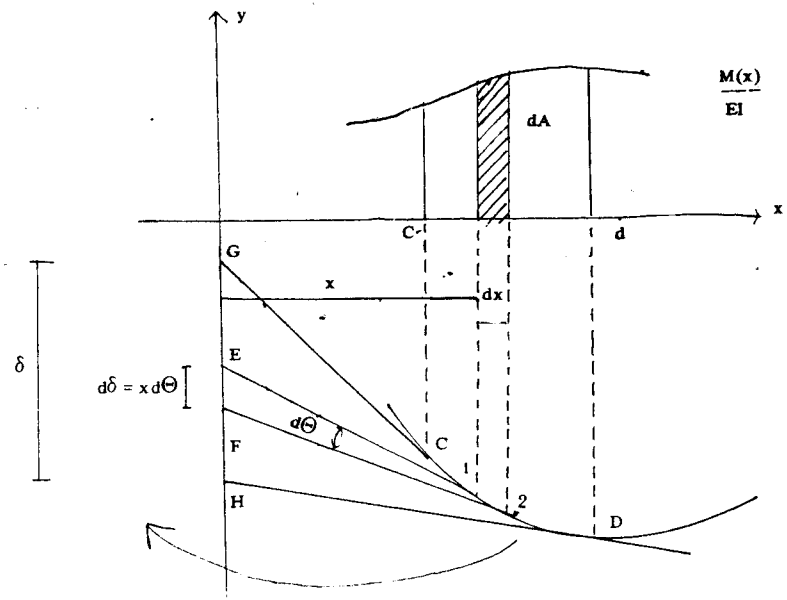
$$M = \frac{P\,L}{8}$$



Gambar 6.2.C.1

Jadi, $M_A = M_B = -PL/8$, dan reaksi R_A tentu sama dengan $R_B = P/2$, masing-masing berarah ke atas.*

Dari contoh-contoh di atas terlihat bahwa apabila kita punya suatu patokan pada suatu titik yang diketahui kelandaiannya, khususnya yang kelandaiannya nol, maka penerapan Teorema I Cara Bidang Momen menjadi sangat praktis. Sedangkan untuk keadaan yang tidak demikian, pemecahan masalah dengan hanya Teorema tersebut tidaklah memadai. Teorema II Cara Bidang Momen akan membantu menjawab kesulitan tersebut dan sekaligus berguna untuk menentukan lendutan suatu titik pada balok.



Gambar 6.1.2.1

* Bangunan statik tidak tertentu dalam contoh ini memiliki reaksi empat buah, sehingga kita katakan derajat ketidak tentuan bangunan ini sama dengan dua, reaksi kelebihannya dalam contoh ini kita ambil M_A dan M_B, tetapi bisa juga kita ambil R_B dan M_B.

Perhatikanlah dua buah titik yang terpisah sejauh dx, titik 1 dan titik 2 pada gambar 6.2.1, jika beda kelandaian mereka kita sebut $d\Theta$, maka menurut Teorema I Cara Bidang Momen,

$$d\Theta = dA \qquad (6.2.3)$$

dengan : d A = luas bidang diagram M(x)/EI antara x dan x + dx.

Jika perpotongan antara kedua garis singgung yang bersangkutan dengan sumbu Y kita namakan E dan F, maka jarak EF dapat kita dekati dengan $x\,d\Theta$, karena kelandaian balok umumnya sangat kecil. Atau, mengingat (6.2.3), jarak EF dapat kita tulis sebagai berikut :

$$d\delta = x\,dA \qquad (6.2.4)$$

Ruas kanan (6.2.4) tidak lain adalah momen luas bidang dA terhadap sumbu Y, sehingga jika kita tafsirkan lebih jauh akan kita dapatkan beberapa kesimpulan berikut :

Pertama, jika kita jumlahkan semua momen bidang dA yang dibatasi oleh garis-garis vertikal melalui dua buah titik sembarang C dan D terhadap sumbu Y, akan kita peroleh jarak antara titik perpotongan sumbu Y dengan garis-garis singgung yang ditarik dari titik C dan D, atau jarak GH dalam gambar 6.2.1 akan sama dengan

$$\delta = \int_C^d x\,dA \qquad (6.2.5)$$

Kedua, sumbu Y pada gambar 6.2.1 dapat kita letakkan di mana saja, sesuai dengan keperluan kita, sebab perubah x dalam rumus (6.2.4) atau (6.2.5) hanyalah menunjukkan jarak antara dA dengan sumbu Y, dengan kata lain, perubah x hanya berperan sebagai penunjuk jarak sumbu Y yang kita pilih dengan elemen luas dA.

Kedua kesimpulan tersebut, jika kita gabungkan, dikenal sebagai :

Teorema II Cara Bidang Momen :

Jarak antara titik-titik potong sembarang garis vertikal dengan garis-garis singgung yang ditarik dari dua buah titik sembarang C dan D pada garis elastik balok, sama dengan momen luas bidang yang dibatasi oleh grafik fungsi M(x)/EI antara titik C dan D terhadap garis vertikal tersebut.

Sebelum kita lihat contoh-contoh yang akan memperjelas pengertian cara Bidang Momen ini, baiklah kita catat dulu hal yang sangat penting berikut ini :

Catatan :

Teorema II Cara Bidang Momen *tidak* mengatakan apapun tentang *lendutan*, yang dikatakan di situ hanyalah tentang jarak dua buah titik pada sembarang garis vertikal (yang merupakan perpotongan garis tersebut dengan dua buah garis singgung pada garis elastik balok).

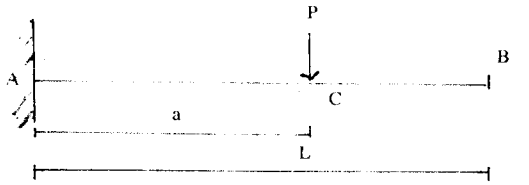
Contoh 6.2.D :

Balok AB sepanjang L terjepit sebelah di A, di titik C sejauh a dari A terdapat beban P. Tentukanlah besar lendutan titik C dan ujung bebasnya, B, jika berat balok diabaikan.

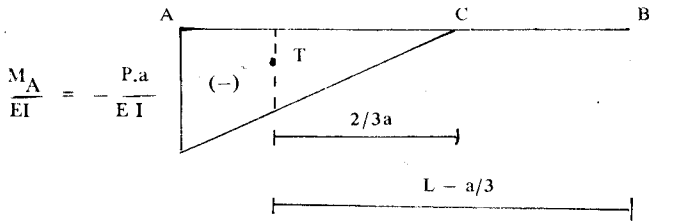
Kenyataan bahwa garis singgung di titik A bersifat mendatar sangat penting artinya, sebab jika kita pilih garis vertikal melalui titik C sebagai garis vertikal sembarang yang dimaksudkan oleh Teorema II, maka perpotongan garis singgung di A dengan garis vertikal melalui C adalah D dalam gambar 6.2.D.1.c, sedangkan perpotongannya dengan garis singgung di C adalah titik C sendiri, sehingga menurut Teorema II jarak CD atau lendutan titik C (dalam hal ini) adalah:

$$\delta_C = CD = (2/3a)(\tfrac{1}{2}(a)(\frac{-Pa}{EI})) = -\frac{P\,a^3}{3EI}$$

Solusi :



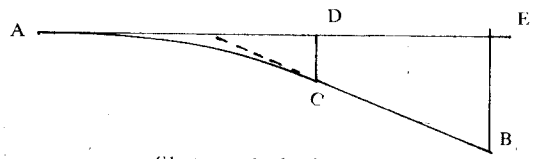
(a)



$$\frac{M_A}{EI} = -\frac{P.a}{EI}$$

(b)

Diagram momen lentur per EI



Sketsa garis elastik balok

Gambar 6.2.D.1

Demikian pula halnya jika kita pilih garis vertikal melaui B sebagai garis vertikal sembarang yang dimaksudkan Teorema II, maka perpotongannya dengan garis singgung dari titik A adalah titik E dalam gambar 6.2.D.1.c, sedangkan perpotongannya dengan garis singgung dari titik B adalah titik B sendiri, sehingga menurut Teorema II jarak EB atau lendutan tiitik B adalah :

$$\delta_B = EB = (L - \frac{a}{3})(\tfrac{1}{2}(a)(\frac{-Pa}{EI})) = -\frac{P\,a^2}{6EI}(3L - a)$$

Catatan tentang tanda :

Seperti yang telah ditunjukkan dalam contoh ini, bidang momen lentur negatif tetap diberi tanda negatif, demikian

pula untuk bidang momen lentur positif tetap diberi tanda positif, sedangkan untuk jarak titik berat bidang momen lentur per EI ke garis vertikal yang bersangkutan *selalu* kita beri tanda positif. Akibatnya, jika momen yang diperoleh berharga negatif berarti titik yang dilalui garis vertikal yang digunakan berada di *bawah* garis singgung yang ditarik dari titik lainnya (dalam contoh ini, titik C atau titik D berada di bawah garis singgung melalui A), sebaliknya jika momen yang diperoleh berharga positif, berarti titik yang dilalui garis vertikal yang digunakan berada di atas garis singgung yang ditarik dari titik lainnya (lihat contoh berikut ini).

Contoh 6.2.E:

Balok prismatik AB sepanjang L yang bertumpu pada sendi A dan rol B memikul beban merata q pada seluruh panjangnya. Tentukan lendutan di tengah-tengah balok tersebut jika berat balok diabaikan.

Solusi :

Karena pembebanan yang simetrik, garis singgung di C (tengah balok) tentu bersifat mendatar, sehingga jika kita pilih garis vertikal melalui titik A sebagai garis sembarang yang dimaksudkan dalam Teorema II, maka perpotongannya dengan garis singgung di A adalah A sendiri, dan jarak A ke titik potongnya dengan garis singgung di C (titik D dalam gambar 6.2.E.1.c) tentu sama dengan lendutan di C.

Menurut Teorema II Cara Bidang Momen,

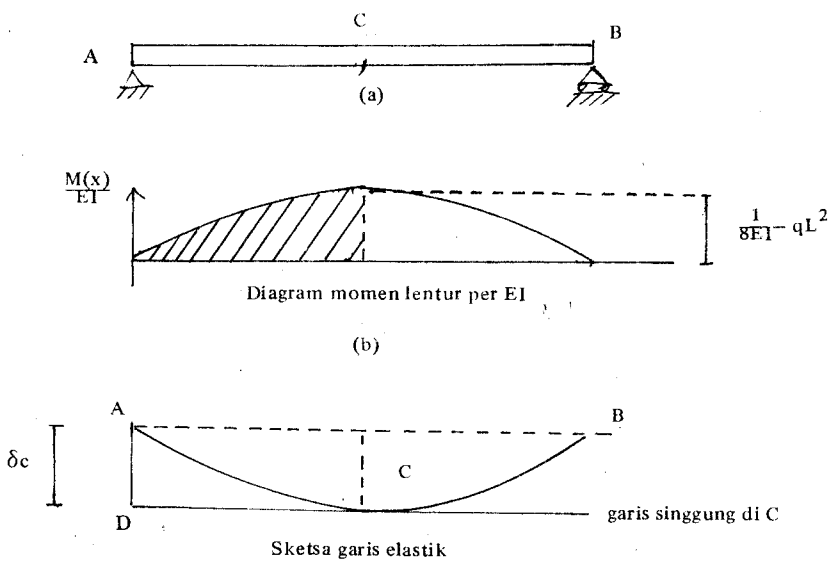
$$AD = \int_0^{L/2} (x)\,(\frac{1}{2EI}\,q(Lx - x^2))dx$$

$$AD = \frac{5}{384\,EI}\,q\,L^4$$

Alhasil kita peroleh :

$$\delta_C = AD = \frac{5}{384\,EI} q L^4$$

Karena hasilnya positif, berarti titik A terletak di atas garis singgung di C (lihat catatan pada contoh 6.2.D).



Gambar 6.2.E.1

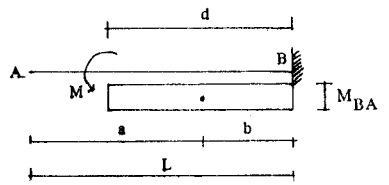
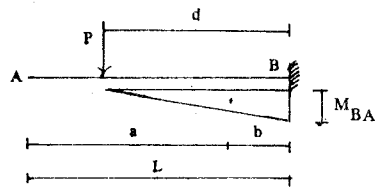
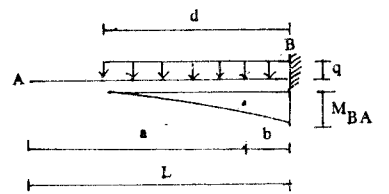
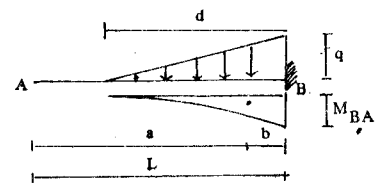
Catatan :

Pengintegralan di atas tidak perlu kita lakukan jika kita tahu luas bidang arsiran pada gambar 6.2.E.1.b

$(= \frac{1}{24EI} q L^3)$ dan jarak titik beratnya ke garis vertikal melalui A $(= \frac{5L}{16})$.

Tentu saja akan lebih baik jika kita ketahui juga luas serta letak titik berat beberapa bidang momen yang akan sering digunakan. Sebagai contoh lihatlah tabel 6.2 berikut :

Tabel 6.2

	$M_{BA} = -M$ $L_M = M_{BA}(d)$ $a = L - d/2$ $b = d/2$
	$M_{BA} = -Pd$ $L_M = M_{BA}(d/2)$ $a = L - d/3$ $b = d/3$
	$M_{BA} = -\frac{1}{2}qd^2$ $L_M = M_{BA}(d/3)$ $a = L - d/4$ $b = d/4$
	$M_{BA} = -1/6\ qd^2$ $LM = M_{BA}(d/4)$ $a = L - d/5$ $b = d/5$

Contoh 6.2.F : Bangunan statik tidak tertentu, penerapan Teorema II Cara Bidang Momen.

Balok AB sepanjang L yang terjepit di A dan ditumpu di atas rol B memikul beban terpusat P di tengahnya. Tentukan semua reaksi perletakannya jika berat balok diabaikan.

Solusi :

Karena A merupakan tumpuan jepit maka garis singgung di A mendatar, sehingga jika garis vertikal melalui B kita pilih sebagai garis vertikal sembarang yang dimaksudkan dalam Teorema II, maka perpotongannya dengan garis singgung di A maupun dengan garis singgung di B adalah titik B sendiri, atau jarak kedua titik potong yang bersangkutan sama dengan nol.

Setelah kita tentukan diagram bidang momen per EI akibat P dan akibat momen di A, M_A (gambar 6.2.F.1.b dan c), kita peroleh :

$$\left[\frac{L}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right)\right]\left(\frac{L}{2}\right) + \left[\frac{L}{2}\left(\frac{-M}{EI}\right)\right]\left(\frac{2L}{3}\right) = 0$$

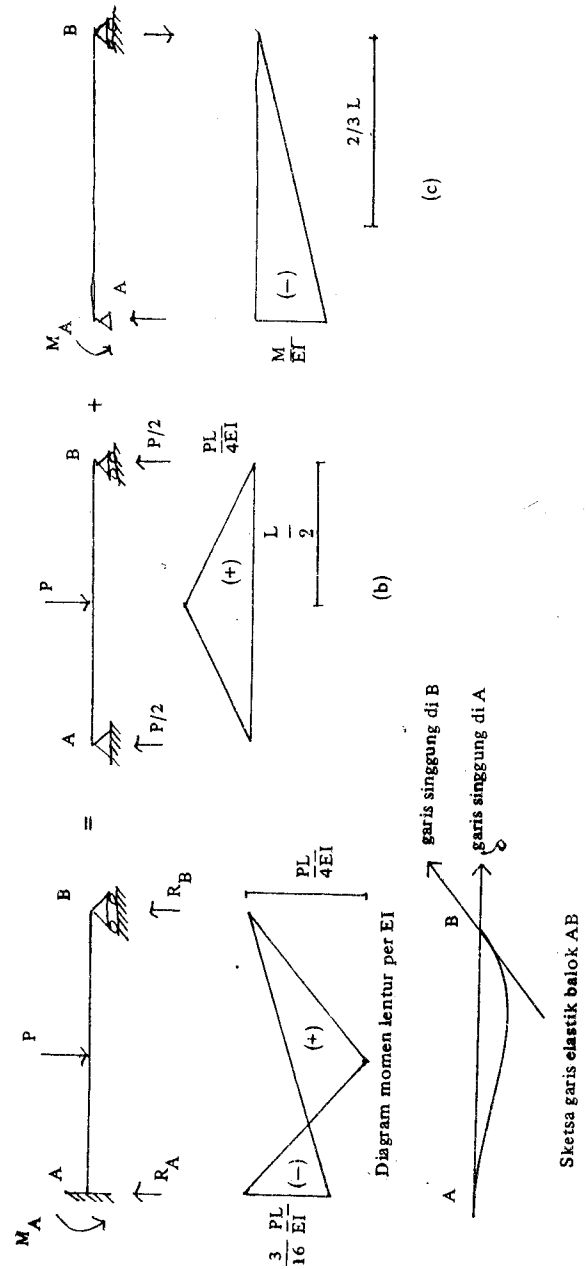
atau

$$M = \frac{3\,P\,L}{16}$$

Ambil momen terhadap B, kita peroleh $R_A = 11/16\ P$, dan akhirnya $R_B = 5/16\ P$ kita peroleh dari syarat keseimbangan gaya-gaya vertikal.

Contoh 6.2.G:

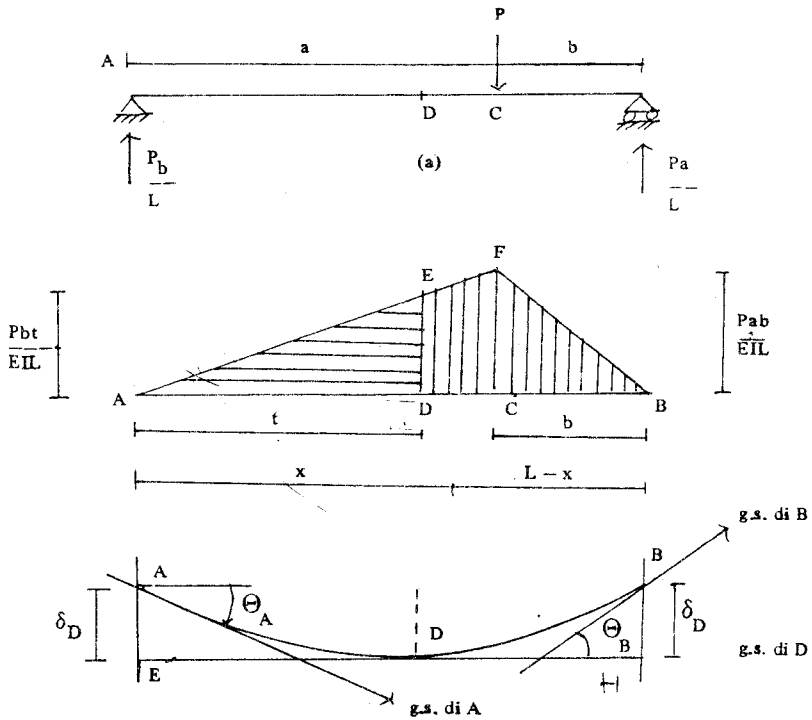
Balok prismatik AB sepanjang L yang menumpu pada sendi A dan rol B memikul beban terpusat P di C, AC = a dan CB = b. Tentukan kelandaian di A dan di B serta lendutan terbesarnya. Berat balok diabaikan.



Gambar 6.2.F.1

Solusi :

Dalam contoh ini kita tidak tahu letak titik yang bergaris singgung mendatar, yakni titik yang mengalami lendutan terbesar, sebutlah titik D yang berjarak t dari titik A, jadi perlu ditentukan dulu. Untuk itu misalkanlah bahwa $a > b$ sehingga diagram momen lenturnya seperti dalam gambar 6.2.G.1.b.



Gambar 6.2.G.1

Pilihlah garis vertikal *melalui A*,maka Teorema II mengatakan bahwa jarak AG (gambar 6.2.G.c) sama dengan momen luas segitiga ADE terhadap garis tersebut, atau :

$$AG = \left(\frac{2}{3}t\right)\left(\frac{t}{2}\left(\frac{Pbt}{EIL}\right)\right) = \frac{Pbt^3}{3EIL} \qquad (6.2.G.1)$$

Pilihlah garis vertikal *melalui B,* maka teorema II mengatakan : bahwa jarak BH (gambar 6.2.G.c) sama dengan momen luas segitiga BCF dan trapesium DCEF terhadap garis vertikal *melalui B,*

$$BH = \frac{Pab^3}{3EIL} + \frac{Pb}{EIL}\left(\frac{L}{2}(a^2 - t^2) - 1/3(a^3 - t^3)\right) \qquad (6.2.G.2)$$

Karena A dan B sama tinggi tentulah AG = BH, sehingga dari (6.2.G.1) dan (6.2.G.2) kita peroleh :

$$\frac{t^3}{3} - \frac{ab^2}{3} = \frac{L(a^2 - t^2)}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{t^3}{3}$$

$$\frac{2\,a(a^2 - b^2)}{L} - 3a^2 = -3\,t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{a^2 + 2\,b\,a}{3}} = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \qquad (6.2.G.3)$$

Setelah t diketahui, gunakan saja (6.2.G.1) untuk menghitung AG atau lendutan terbesar balok, yakni :

$$= \frac{P\,b(L^2 - b^2)}{9\sqrt{3}\,EIL}\sqrt{L^2 - b^2} \qquad (6.2.G.4)$$

Demikian pula halnya dengan kelandaian di A yang merupakan luas segitiga ADE dalam gambar 6.2.G.1.c (Teorema I) :

$$0 - \Theta_A = \frac{P\,b}{6EIL}(L^2 - b^2) \qquad (6.2.G.5)$$

Maka kelandaian di A,

$$\Theta_A = -\frac{P\,b\,a\,(L+b)}{6\,E\,I\,L} \qquad (6.2.G.5)$$

Sedangkan kelandaian di B tentu akan lebih mudah jika kita tentukan melalui beda kelandaian di A dan di B yang sama dengan luas segitiga ABF (gambar 6.2.G.1.c), atau

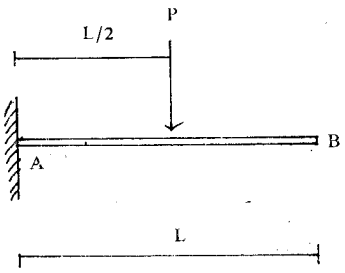
$$\Theta_B - \Theta_B = \frac{L}{2}\left(\frac{P\,ab}{EIL}\right) \qquad (6.2.G.6)$$

Gunakan hasil (6.2.G.5) ke dalam (6.2.G.6) kita peroleh :

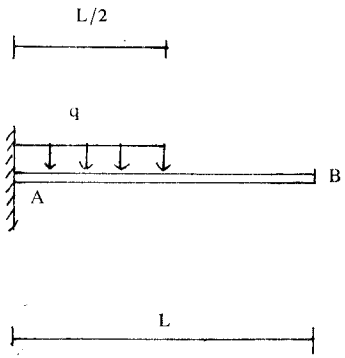
$$\Theta_B = \frac{P\,a\,b\,(L+a)}{6\,E\,I\,L} \qquad (6.2.G.7)$$

6.2. SL SOAL LATIHAN

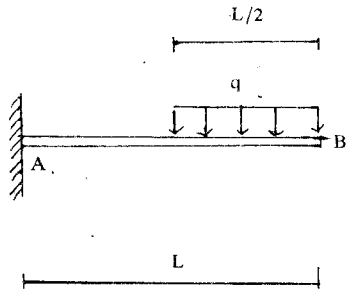
1. Tentukanlah lendutan dan kelandaian di titik B pada masing-masing balok prismatik dalam gambar A, B dan C. Berat balok diabaikan.



Gambar A

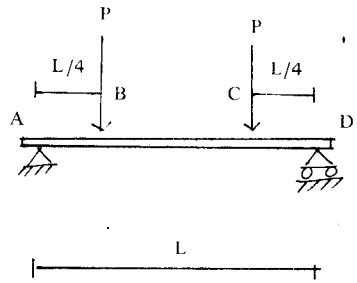


Gambar B



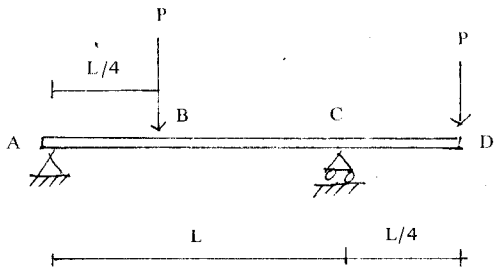
Gambar C

2. Balok prismatik ABCD di atas dua tumpuan sederhana (gambar D) menerima beban terpusat di titik B dan C masing-masing sebesar P. Berat balok diabaikan. Tentukanlah :
   a. Lendutan balok di titik B dan C.
   b. Kelandaian balok di A, B, C dan D.



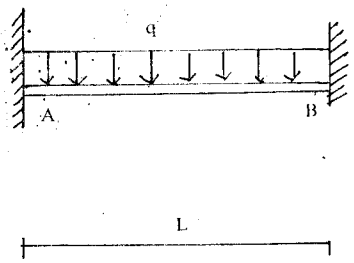
Gambar D

3. Balok prismatik ABCD di atas tumpuan sendi dan rol (gambar E), dan menerima beban terpusat di B dan D masing-masing sebesar P. Abaikanlah berat balok, dan tentukan :
   a. Lendutan balok di B dan D.
   b. Kelandaian balok di A, B, C dan D.

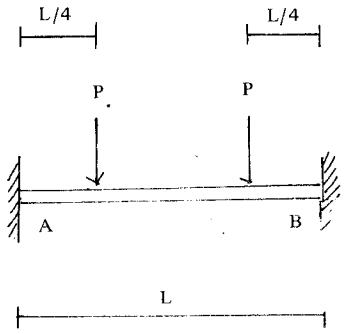


Gambar E

4 Tentukanlah reaksi-reaksi tumpuan pada masing-masing bangunan statik tidak tertentu dalam gambar F dan G (Berat balok diabaikan).



Gambar F

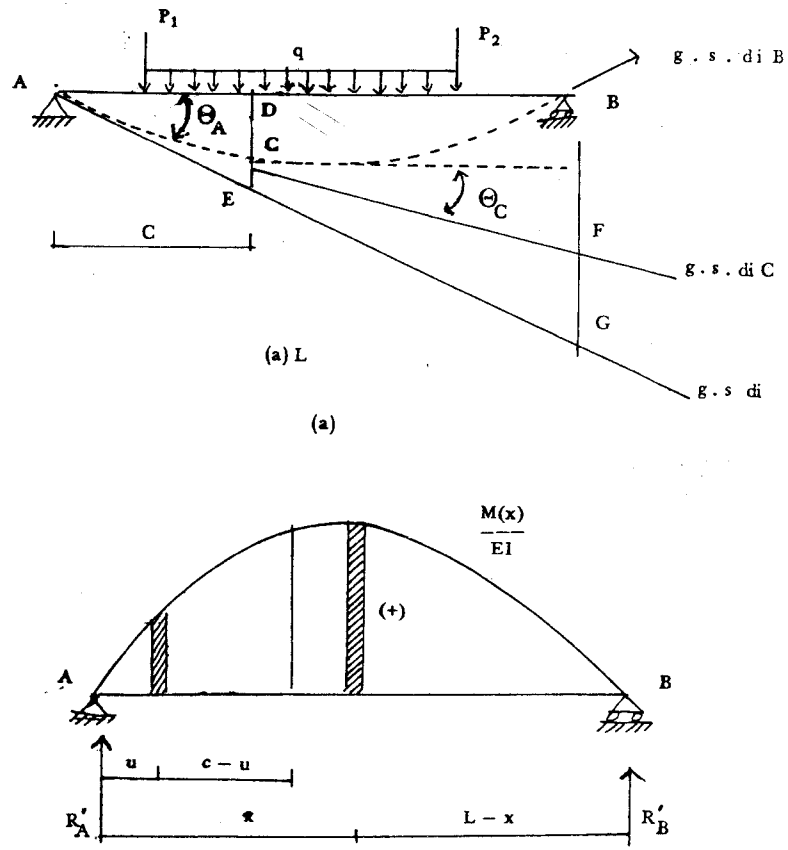


Gambar G

6.3 Cara Balok Sekawan

Sebagaimana telah kita lihat dalam contoh-contoh di muka, Cara Bidang Momen sangat cocok untuk menghitung kelandaian maupun lendutan suatu titik apabila kita tahu letak salah satu titik yang garis singgungnya pada garis elastik balok bersifat mendatar. Tetapi tidak selalu sifat semacam itu kita jumpai, keadaan seperti dalam gambar 6.3.1 adalah contohnya, karena tidak ada satupun petunjuk yang menerangkan letak titik yang bergaris singgung mendatar, sehingga penerapan cara Bidang Momen secara "langsung"

tidak akan jalan. Tetapi, dengan sedikit kecerdikan hal tersebut akan dapat kita atasi. Begini,



Gambar 6.3.1

Perhatikan gambar 6.3.1.a. Karena Θ_A kecil maka ia dapat kita dekati dengan tangensnya, atau $\Theta_A = -$ BG/AB*.

* tanda (−) untuk menunjukkan arah Θ_A.

Dan menurut Teorema II Cara bidang Momen, BG sama dengan momen luas bidang M(x)/EI antara A dan B terhadap garis vertikal melalui B, sehingga kita peroleh :

$$BG = (L)(-\Theta_A) = \int_0^L \frac{M(x)}{E\,I}(L-x)\,dx \qquad (6.3.1)$$

Sekarang pandanglah diagram M(x)/EI sebagai beban yang bekerja pada balok AB yang bertumpu di atas sendi A dan rol B. Jika reaksi sendi A kita sebut R'_A, maka dari syarat keseimbangan momen di B kita peroleh (gambar 6.3.1.b) :

$$(L)(R'_A) = \int_0^L \frac{M(x)}{E\,I}(L-x)\,dx \qquad (6.3.2)$$

Alhasil, dari (6 3.1) dan (6.3.2) dapatlah kita simpulkan :

$$\Theta_A = -R'_A \qquad (6.3.3)$$

Selanjutnya, menurut Teorema I Cara Bidang Momen, beda kelandaian antara sembarang titik C dengan Titik A sama dengan luas bidang M(x)/EI antara A dengan C, atau

$$\Theta_C - \Theta_A = \int_0^C \frac{M(x)}{E\,I}\,dx \qquad (6.3.4)$$

Gunakan hasil (6.3.3) ke dalam (6.3.4),

$$\Theta_C = \int_0^C \frac{M(x)}{EI}\,dx - R'_A \qquad (6.3.5)$$

Dan ruas kanan persamaan (6.3.5) tentulah merupakan *gaya lintang* pada balok yang dibebani oleh diagram M(x)/EI (gambar 6.3.1.b).

Selanjutnya mari kita lihat lendutan di C. Dari Teorema II Cara Bidang Momen kita tahu bahwa panjang CE dalam gambar 6.3.1.a sama dengan momen luas bidang M(x)/EI antara A dan C terhadap garis vertikal melalui C. Sedang-

kan panjang DE tentu sama dengan $(c)(-\Theta_A)$, sehingga lenturan di C menjadi :

$$\delta_C = DC = DE - CE$$
$$= (-\Theta_A)(c) - \int_0^C \frac{M(u)}{E\,I}(c-u)du$$

atau

$$\delta_C = (R'_A)(c) - \int_0^C \frac{M(u)}{E\,I}(c-u)\,du \qquad (6.3.6)$$

Ruas kanan (6.3.6) merupakan momen lentur di C pada balok AB yang dibebani oleh diagram M(x)/EI.

Jadi, jika balok AB yang dibebani oleh diagram M(x)/EI dan yang bertumpu pada sendi A dan rol B (gambar 6.3.1.b) kita sebut sebagai : *balok sekawan* untuk balok AB yang menderita momen lentur M(x) dan yang bertumpu pada sendi A dan rol B (gambar 6.3.1.a), maka (6.3.3), (6.3.5) dan (6.3.6) dapat kita simpulkan sebagai :

Teorema Cara Balok Sekawan :

Kelandaian dan lendutan sebuah balok di sembarang titik, masing-masing sama dengan gaya lintang dan momen lentur pada balok sekawannya di titik yang bersangkutan.

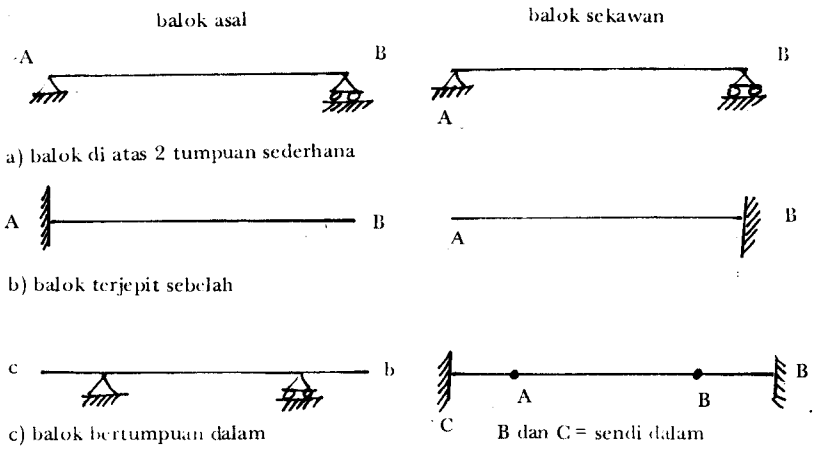
Catatan :

* Pada penurunan teorema di atas, patokan kita adalah kelandaian di A. Karena kelandaian di A akibat momen lentur positif bertanda negatif, sedangkan gaya lintang pada balok sekawannya di A sama dengan R'_A (reaksi perletakan balok sekawannya), maka supaya tanda yang diperoleh sesuai dengan keadaan sebenarnya, R'_A yang berarah ke atas kita beri tanda negatif dan beban M(x)/EI yang positif kita pandang sebagai beban yang berarah ke bawah, akibatnya cara pemberian tanda baik untuk gaya lintang maupun

untuk momen lentur *pada balok sekawan* menjadi *berlawanan* dengan cara yang biasa kita lakukan pada balok asalnya (lihatlah contoh-contoh berikut).

* Meskipun teorema di atas kita turunkan melalui balok di atas dua tumpuan sederhana, namun ia berlaku juga untuk balok terjepit sebelah dan bahkan untuk balok yang bertumpuan dalam (gambar 6.3.2.c), asal saja balok sekawan yang bersangkutan telah kita sesuaikan (gambar 6.3.2).

* Dasar penentuan balok sekawan adalah kedua teorema Cara Bidang Momen dan syarat batas pada balok yang bersangkutan. Pada balok terjepit sebelah, syarat batasnya adalah bahwa pada tumpuan jepitnya kelandaian dan lendutannya nol, sehingga balok sekawannya harus bersifat sedemikian rupa sehingga gaya lintangnya dan momen lenturnya di titik tersebut sama dengan nol, sedangkan pada tumpuan dalam sebuah balok, lendutannya nol sedangkan kelandaiannya tidak selalu nol, sehingga balok sekawannya harus bersifat sedemikian rupa sehingga momen lenturnya nol dan gaya lintangnya tidak selalu nol. Perhatikan gambar 6.3.2

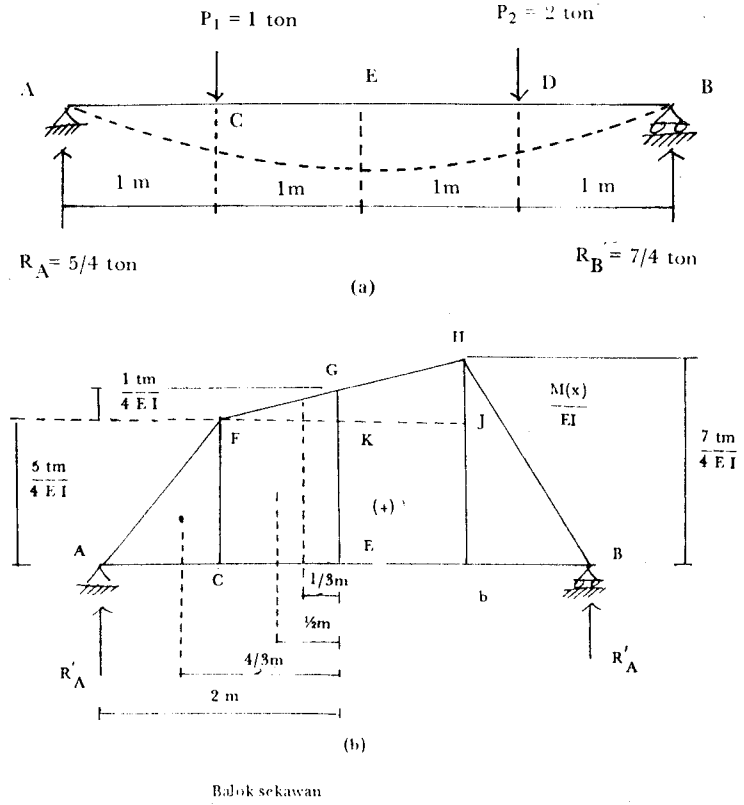


Gambar 6.3.2

Contoh 6.3.A:

Balok kayu prismatik AB yang bertumpu pada sendi A dan rol B memikul beban terpusat P_1 = 1 ton di titik C dan P_2 = 2 ton di titik D. Jarak AC = 1 meter, CD = 2 meter dan DB = 1 meter. Modulus keelastisannya E = 10^5 kg/cm^2, penampangnya berukuran 12 x 18 cm^2. Hitunglah kelandaian dan lendutan di tengah balok E jika beratnya diabaikan.

Solusi :



Gambar 6.3.A.1

Setelah kita tentukan diagram momen lenturnya, balok sekawannya dapat kita tentukan seperti dalam gambar 6.3.A.1.b. Lalu bagilah "beban"nya menjadi segitiga ACF, segitiga FHJ, epp CDFJ dan segitiga BDH, supaya penentuan titik beratnya menjadi lebih mudah; kemudian ambillah momen di B sama dengan nol, kita peroleh :

$$EI(R'_A) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{5}{8}\right)\left(2+\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)(2) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}+1\right) + \left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

atau

$$R'_A = -\frac{17}{8EI}\ tm^2 \qquad (R'_A \text{ berarah ke atas})$$

Gaya lintang di E :

$$\Theta_E = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) - \frac{17}{8}\right]\ tm^2$$

$$= \frac{-1}{8EI}\ tm^2 \qquad (6.3.A.1)$$

Momen lentur di E :

$$\delta_E = \frac{1}{EI}\left[\left(-\frac{17}{8}\right)(2) + \left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\right]\ tm^3$$

$$\delta_E = \frac{-11}{4EI}\ tm^3 \qquad (6.3.A.2)$$

$$EI = (10^5)\left(\frac{1}{12}\right)(12)(18)^3\ kg\ cm^2$$

$$= 5832(10^5)(10^{-7})\ tm^2$$

Dari (6.3.A.1) dan (6.3.A.2) masing-masing kita peroleh :

$\Theta_E = -0{,}00214$ radial

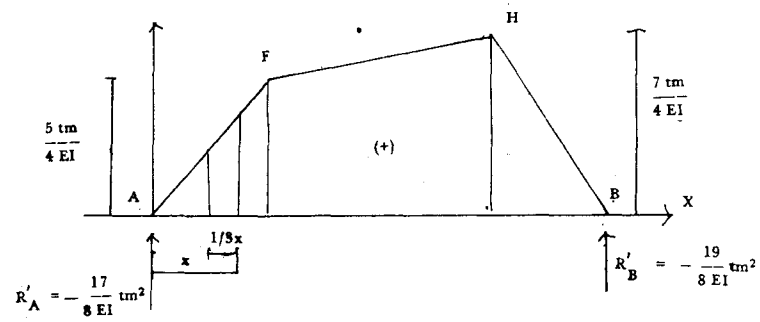
$\delta_E = -0{,}04715\ m = -4{,}715\ cm$

Contoh 6.3.B :

Tentukanlah persamaan garis elastik balok pada contoh 6.3.A dan lendutan maksimumnya.

Solusi :

Perhatikan balok sekawannya dalam gambar 6.3.B.1



Gambar 6.3.B.1

Lendutan di titik sejauh x dari A sama dengan momen lentur balok sekawan di titik tersebut, atau untuk $0 \leq x \leq 1$,

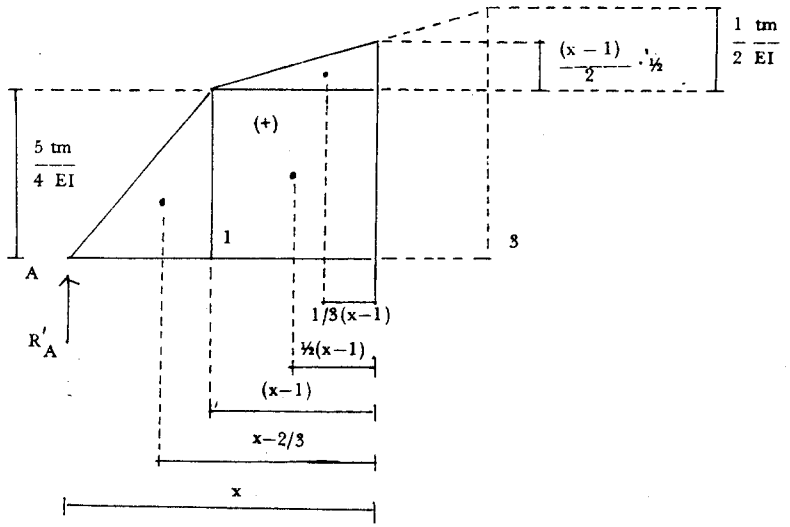
$$y = \left[-\frac{17}{8EI}(x) + \left(\frac{1}{2}\right)(x)\left(\frac{5}{4EI}x\right)\left(\frac{1}{3}x\right)\right] \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$EIy = -\frac{17}{8}x + \frac{5}{24}x^3 \qquad 0 \leq x \leq 1$$

(6.3.B.1)

Untuk $1 \leq x \leq 3$, lihat gambar 6.3.B.2 :

$$EIy = \left(-\frac{17}{8}\right)(x) + \left(\frac{5}{8}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right) + \frac{5}{4}(x-1)\left(\frac{1}{2}(x-1)\right) + \frac{1}{8}(x-1)^2\left(\frac{1}{3}(x-1)\right)$$

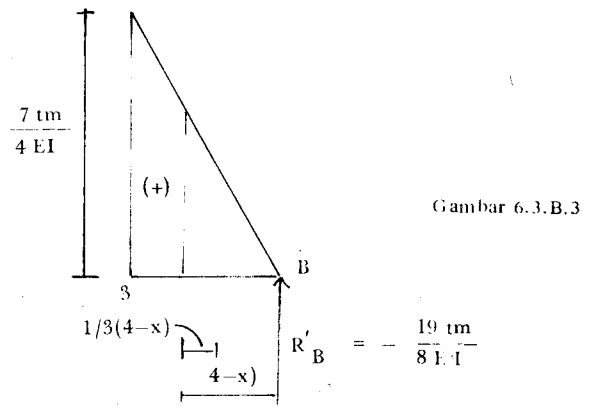


Gambar 6.3.B.2

$$EIy = \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{8}x + \frac{1}{6} \qquad 1 \leq x \leq 3 \qquad (6.3.B.2)$$

Untuk $3 \leq x \leq 4$, lihat gambar 6.3.B.3 :

$$EIy = (R'_B)\ (4-x) + [7/8(4-x)^2]\,[1/3(4-x)]$$
$$EIy = -1/24\,(4-x)\,[57 - 7(4-x)^2]$$
$$3 \leq x \leq 4 \qquad (6.3.B.3)$$



Gambar 6.3.B.3

Untuk menentukan lendutan maksimum, turunkanlah (6.3.B.2) terhadap x akan kita peroleh persamaan kelandaian balok, dan akhirnya kita peroleh $\Theta_x = 0$ untuk x = 2,083 m. Sehingga lendutan maksimumnya = −0,047 m = − 4,7 cm

Contoh 6.3.C :

Balok ABC terjepit sebelah di A, AB = BC = 2 meter. Sepanjang AB terdapat beban merata sebesar q = 500 kg/m, di ujung bebasnya C terdapat beban terpusat P = 500 kg. Penampang balok sepanjang AB berukuran 12 x 18 cm^2 dan sepanjang BC berukuran 12 x 15 cm^2. Tentukan lendutan dan kelandaian di ujung balok C jika berat balok diabaikan, modulus keelastisannya E = 1,5 x 10^5 kg/cm^2.

Solusi :

Karena ukuran penampang balok tidak sama, momen inersia penampangnya juga tidak sama, sehingga untuk penentuan balok sekawannya kita perlu menghitung dulu besaran EI yang bersangkutan.

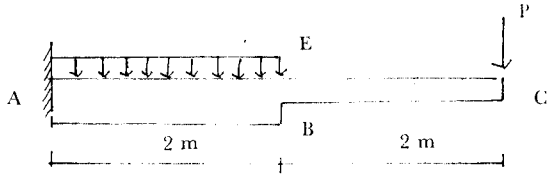
Bagian AB :

$$EI_{AB} = (1{,}5)(10^5)(1/12)(12)(18)^3 \text{ kgcm}^2$$
$$= 87{,}48 \text{ ton m}^2$$

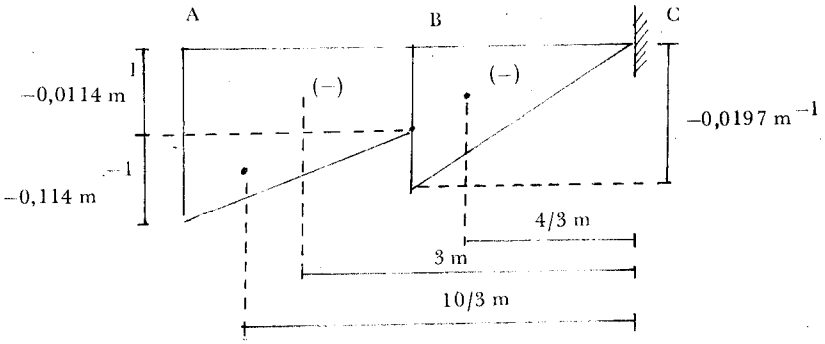
Bagian BC :

$$EI_{BC} = 87{,}48\ \frac{(15)^3}{(18)^3}\ \text{tm}^2$$
$$= 50{,}625 \text{ tm}^2$$

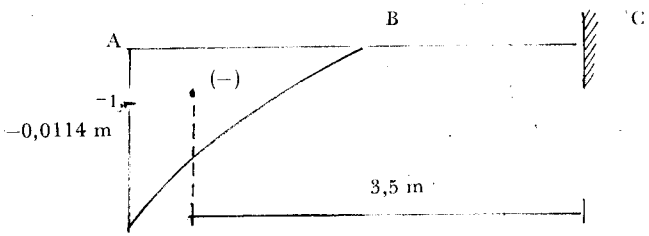
Untuk penyederhanaan, pisahkanlah muatan pada balok sekawan AC, masing-masing akibat beban P dan akibat beban q, tentu saja dengan EI yang bersangkutan (gambar 6.3.C.1.b dan c).



(a)



(b) Diagram M(x)/EI akibat P



(c) Diagram M(x)/EI akibat q

Gambar 6.3.C.1

Akibat P :

Θ_{CP} = $-[\frac{1}{2}(0{,}0114 + 0{,}0228(2) + \frac{1}{2}(0{,}0197)(2)]$
= $-0{,}0539$ rad

δ_{CP} = $-[\frac{1}{2}(2)(0{,}0114)(10/3) + (0{,}0114)(2)(3) + \frac{1}{2}(2)(0{,}0197)4/3)]$ m
= $-0{,}1327$ m

Akibat q :

Θ_{Cq} = $-1/3(0{,}0114)(2)$ rad = $-0{,}0076$ rad
δ_{Cq} = $-(0{,}0076)(3{,}5)$ m = $-0{,}0266$ m

Akibat P dan q :

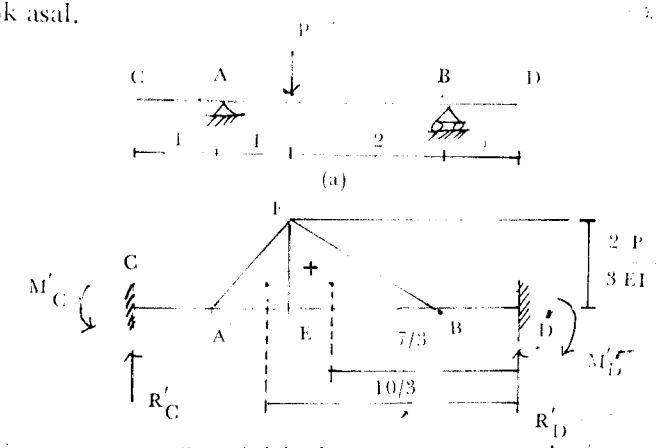
Θ_C = $-0{,}0615$ rad dan
δ_C = $-15{,}93$ cm

Contoh 6.3.D :

Sebuah balok prismatik sepanjang 5 meter bertumpu pada sendi A dan rol B. Jarak ujung balok C ke sendi A, 1 meter; Jarak sendi A ke rol B, 3 meter; Dan jarak rol B ke ujung balok D, 1 meter. Di titik E yang berjarak 2 meter dari titik A pada balok terdapat beban terpusat P = 2 t. Tentukan kelandaian dan lendutan di titik C, D dan E. Berat balok diabaikan. EI balok = 58,32 tm^2.

Solusi :

Karena balok prismatik, momen inersia penampangnya tetap, sehingga diagram muatan pada balok sekawannya (gambar 6.3.D.1.b) serupa dengan diagram momen lentur balok asal.



(b) balok sekawan
A & B sendi dalam

Gambar 6.3.D.1

Perhatikan, pada balok sekawannya A dan B merupakan sendi dalam, sehingga *momen lenturnya* di situ sama dengan nol (lendutan di sendi A dan rol B pada balok asal sama dengan nol). Ada 4 reaksi yang timbul pada balok sekawan, dan seperti diketahui balok sekawan tersebut merupakan bangunan statik *tertentu*, karena di samping 2 persamaan keseimbangan statik, ada 2 syarat tambahan di sendi dalam A dan B, yakni momen lenturnya nol. Keseimbangan gaya-gaya vertikal pada seluruh bangunan balok sekawan menghasilkan persamaan :

$$R'_C + R'_D = \text{luas segitiga ABF} = P/EI \qquad (6.3.D.1)$$

Keseimbangan momen - gaya pada seluruh bangunan di D meng hasilkan persamaan :

$$(R'_C)(5) - M'_C - \tfrac{1}{2}(1)(2P/3EI)(10/3) - \tfrac{1}{2}(2)(2P/3EI)(7/3) - M'_D = 0 \qquad (6.3.D.2).$$

Momen lentur di sendi dalam A sama dengan nol, atau :

$$-M'_C + (R'_C)(1) = 0 \qquad (6.3.D.3)$$

Momen lentur di sendi dalam B sama dengan nol, atau :

$$M'_D - (R'_D)(1) = 0 \qquad (6.3.D.4)$$

Pergantian (6.3.D.1) ke dalam (6.3.D.4) menghasilkan:

$$M'_D = \frac{P}{EI} - R'_C \qquad (6.3.D.5)$$

Pergantian (6.3.D.3) dan (6.3.D.5) ke dalam (6.3.D.2) menghasilkan :

$$5R'_C - R'_C - \frac{10P}{9EI} - \frac{14P}{9EI} - \left(\frac{P}{EI} - R'_C\right) = 0$$

$$R'_C = \frac{5P}{9EI} \qquad (6.3.D.6)$$

Gunakan hasil (6.3.D.6) ke dalam (6.3.D.1), (6.3.D.3) dan (6.3.D.5) kita peroleh :

$$R'_D = \frac{4P}{9EI}$$

$$M'_C = \frac{5P}{9EI} \qquad \text{(ingat satuannya tidak sama dengan } R'_C\text{)}$$

$$M'_D = \frac{4P}{9EI} \qquad \text{(ingat satuannya tidak sama dengan } R'_D\text{)}$$

Jadi, kelandaian dan lendutan balok di C dan D masing-masing adalah :

$$\Theta_C = R'_C = -\frac{5(2)}{9(58{,}32)} \text{ rad} = -0{,}019 \text{ rad}^*$$

$$\delta_C = M'_C = 0{,}019 \text{ m} = 1{,}9 \text{ cm}^*$$

$$\Theta_D = \frac{4(2)}{9(58{,}32)} \text{ rad} = 0{,}015 \text{ rad}^*$$

$$\delta_D = 0{,}015 \text{ m} = 1{,}5 \text{ cm}^*$$

Sedangkan kelandaian dan lendutan di E :

Θ_E = gaya lintang di E

$$= -\frac{5P}{9EI} + \frac{P}{3EI}$$

$$= -\frac{2P}{9EI} = -\frac{2(2)}{9(58{,}32)} \text{ rad} = -0{,}008 \text{ rad}$$

δ_E = momen lentur di E

$$= R'_C(2) - M'_C + \left(\frac{2P}{9EI}\right)(1/3)$$

---

* Lihat perjanjian tanda untuk Cara Balok Sekawan (tanda gaya lintang dan momen lenturnya berlawanan dengan tanda yang digunakan untuk balok asal).

$$= -\frac{10\,P}{9EI} + \frac{5P}{9EI} + \frac{2\,P}{27EI}$$

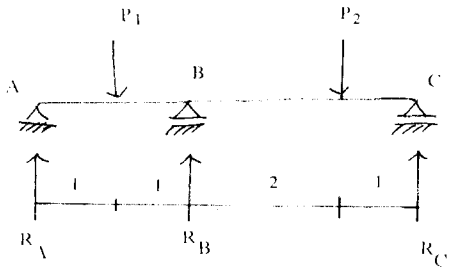
$$= -\frac{13(2)}{27\,(58{,}32)}\ \text{m} = -0{,}0165\ \text{m}$$

$$= -1{,}65\ \text{cm}^*$$

Contoh 6.3.E : Bangunan Statik Tidak Tertentu

Sebuah balok prismatik ABC ditumpu oleh sendi A di ujungnya, rol B pada jarak 2 meter dari A dan rol C di ujung lainnya, 5 meter dari A. Di E, 1 meter dari A balok memikul beban terpusat $P_1 = 2$ ton dan di F, 4 meter dari A balok memikul beban terpusat $P_2 = 2$ ton. Tentukan reaksi-reaksi tumpuan balok tersebut jika berat balok diabaikan.

Solusi :



(a)

Gambar 6.3.E.1

* Lihat perjanjian tanda untuk Cara Balok Sekawan (tanda gaya lintang dan momen lentumya berlawanan dengan tanda yang digunakan untuk balok asal).

Dalam contoh ini akan kita gunakan kembali prinsip perubahan-bentuk-taat-asas (gambar 6.3.E.1).

Akibat gaya-gaya P_1 dan P_2, lendutan di B pada balok AC yang hanya ditumpu di A dan C dapat kita tentukan dari balok sekawannya (gambar 6.3.E.1.b), yakni sebagai berikut :

Reaksi R'_A kita perolch dengan mengambil momen di C yang harus sama dengan nol, atau :

$$R'_A = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}(3+5)\left(\frac{2}{EI}\right)(2{,}5)\right]$$

$$= \frac{4}{EI}$$

Jadi momen lentur di B atau lendutan di B :

$$\delta_{B_1} = \left(\frac{-4}{EI}\right)(2) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{2}{EI}\right)(1)\left(-\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{2}{EI}\right)(1)(\tfrac{1}{2})$$

$$\delta_{B_1} = -\frac{17}{3EI} \qquad (6.3.E.1)$$

Akibat reaksi R_B, lendutan di B pada balok AC yang ditumpu di A dan di C dapat kita tentukan dari balok sekawannya (gambar 6.3.E.1.c), yakni sebagai berikut :

$$R''_A = 1/5\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{6R_B}{5EI}\right)(2)(8/3) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{-6R_B}{5\,E\,I}\right)(3)(2)\right]$$

$$R''_A = -\frac{34}{25EI}R_B$$

Jadi momen lentur di B atau lendutan di B akibat R_B adalah :

$$\delta_{B_2} = \left(\frac{34}{25EI}R_B\right)(2) - \left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{6\,R_B}{5\,E\,I}\right)(2)(2/3)\right]$$

$$\delta_{B_2} = \frac{48}{25EI} R_B \qquad (6.3.E.2)$$

Lendutan di tumpuan B akibat beban P_1 dan P_2 dan reaksi R_B harus sama dengan nol, sehingga dari (6.3.E.1) dan (6.3.E.2) kita peroleh :

$$R_B = \frac{425}{144} \text{ ton}$$

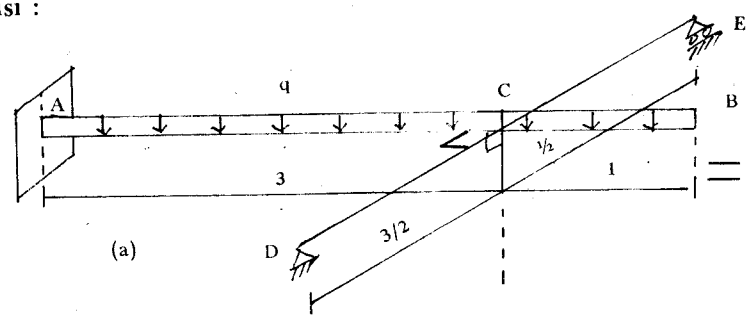
Setelah R_B diketahui, R_A dapat dihitung dari syarat keseimbangan momen di C pada balok asalnya, yakni $R_A = \frac{11}{48}$ t, kemudian

$$R_C = 2 + 2 - \frac{425}{144} - \frac{11}{48} = \frac{118}{144} \text{ ton}$$

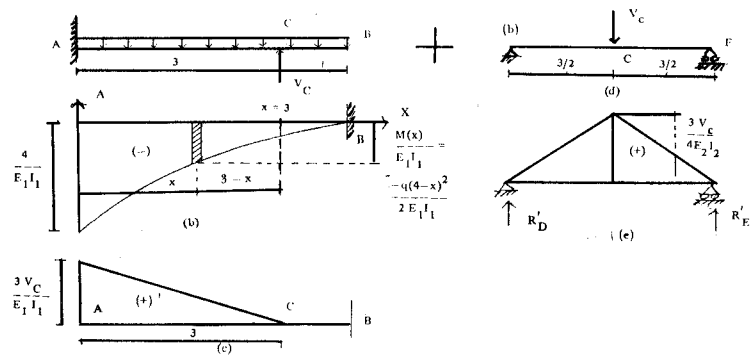
Contoh 6.3.F :

Sebuah balok prismatik AB yang terjepit sempurna di ujungnya A memikul beban merata pada seluruh panjangnya. Di titik C yang berjarak 3 meter dari A balok tersebut bertumpu pada balok DE yang menyilangnya secara tegak lurus (gambar 6.3.F.1). Panjang balok AB 4 meter dan balok DE 3 meter. Ujung balok B bebas sedangkan balok DE bertumpu pada sendi D dan rol E. Faktor kekakuan balok AB, $E_1 I_1 = 40$ ton m^2 dan balok DE, $E_2 I_2 = 60$ ton m^2. Tentukanlah reaksi tumpuan balok masing-masing dan lendutannya di titik pertemuannya jika q = 0,5 ton/m dan berat balok diabaikan.

Solusi :



Gambar 6.3.F.1



Gambar 6.3.F.2

Balok DE menghalangi sebagian lendutan balok AB sehingga balok DE mengalami beban vertikal ke bawah di C, katakanlah sebesar V_C, sebaliknya balok AB sendiri tentu juga mengalami gaya vertikal ke atas sebesar V_C pula (aksi = reaksi).

Lendutan pada balok AB di titik C akibat beban merata q dan reaksi V_C tentu sama dengan lendutan pada balok DE akibat tekanan balok AB.

Lendutan di C pada balok AB :

Akibat beban merata q (gambar 6.3.F.2.b), persamaan momen lenturnya adalah :

$$M(x) = -\tfrac{1}{2}q(4-x)^2$$

Jadi, pada balok sekawannya, momen lentur di titik C menjadi :

$$\delta_{Cq} = \int_0^3 \frac{(Mx)}{E_1 I_1}(3-x)\,dx$$

$$\delta_{Cq} = \int_0^3 -\frac{1}{2E_1 I_1} q\,(4-x)^2(3-x)\,dx$$

$$\delta_{Cq} = -\frac{1}{2E_1 I_1} q \int_0^3 (48-40x+11x^2-x^3)\,dx$$

$$\delta_{Cq} = -\frac{171}{8E_1 I_1} q \qquad (6.3.F.1)$$

Akibat reaksi V_C di C (gambar 6.3.F.2.c)

$$\delta_{CV} = \left(\frac{3V_C}{E_1 I_1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(2) = \frac{9\,V_C}{E_1 I_1} \qquad (6.3.F.2)$$

Jadi lendutan di C pada balok AB menjadi :

$$\delta_{C1} = \delta_{Cq} + \delta_{CV}$$

$$= -\frac{171(0,5)}{8(40)} + \frac{9\,V_C}{40} \qquad (6.3.F.3)$$

Sedangkan lendutan di C pada balok DE (gambar 6.3.F.2.e) :

$$R'_D = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{4E_2 I_2} V_C\right)\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{9}{16E_2 I_2} V_C$$

Momen lentur di C pada balok sekawannya atau lendutannya di C :

$$\delta_{C_2} = -\left(\frac{9\,V_C}{16E_2 I_2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3\,V_C}{4E_2 I_2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\delta_{C_2} = \frac{-9}{16E_2 I_2} V_C$$

$$\delta_{C_2} = \frac{-9}{16(60)} V_C \qquad (6.3.F.4)$$

Samakan ruas kanan (6.3.F.3) dengan ruas kanan (6.3.F.4), kita peroleh :

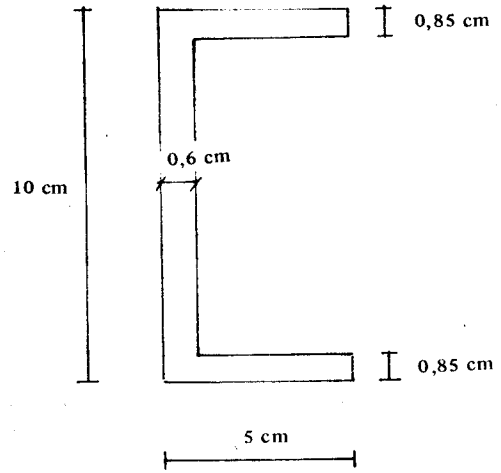
$$V_C = \frac{57}{50}\ \text{ton}$$

Lendutan di C menjadi :

$$\delta_{C_1} = \delta_{C_2} = -0,0107\ \text{m} = -1,07\ \text{cm}$$

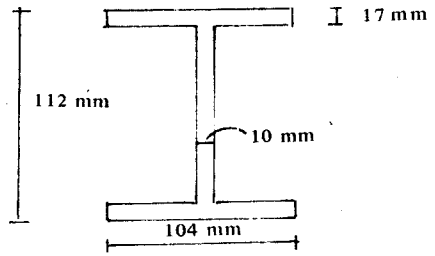
6.3 SL SOAL LATIHAN

1. Balok AB, panjangnya 4 m, penampang tegaknya berbentuk huruf C seperti terlihat pada gambar A. Balok bertumpu pada sendi A dan rol B, serta memikul beban terpusat P_1 = 700 kg di suatu titik yang berjarak 1,5 m dari sendi A dan beban terbagi rata q = 100 kg/m' di seluruh panjang balok. Modulus keelastisan balok, E = 2,1 (10^6) kg / cm^2. Abaikan berat balok dan tentukan :
   a. Kelandaian dan lendutan balok di tengah bentang.
   b. Persamaan garis elastik balok dan lendutan maksimumnya.



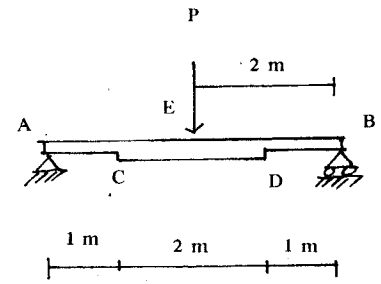
Gambar A

c. Buatlah soal a dan b di atas jika penampang balok berbentuk huruf I seperti terlihat dalam gambar B.



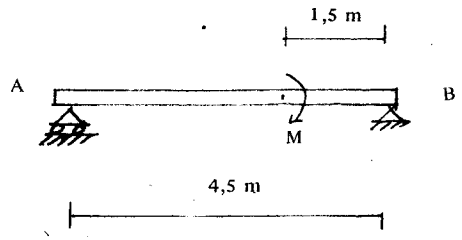
Gambar B

2. Balok AB di atas dua tumpuan sederhana (gambar C). Sepanjang AB terdapat beban terbagi rata q = 300 kg/m', dan di titik E terdapat beban terpusat P = 500 kg. Penampang balok sepanjang AC dan DB masing-masing berukuran 12 x 18 cm^2; sedangkan sepanjang CD berukuran 12 x 20 cm^2. Modulus keelastisan balok, E = 10^5 kg/cm^2. Abaikan berat balok, dan tentukan :
   a. Kelandaian balok di A, B, C, D dan E.
   b. Lendutan balok di E.



Gambar C

3. Balok prismatik AB di atas dua tumpuan sederhana dengan pembebanan seperti terlihat dalam gambar D. Modulus keelastisan balok, E = 2,1 (10^6) kg/cm^2; Sedangkan momen inersia penampangnya (terhadap garis berat horisontal) adalah I = 171 cm^4.
   a. Tentukanlah persamaan garis elastik balok dan lendutan maksimumnya.
   b. Tentukan pula kelandaian balok di A, B dan titik yang mengalami lendutan maksimum.
   c. Gambarkan sketsa garis elastik balok.

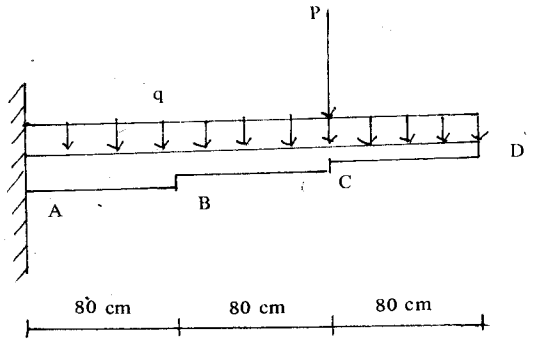


Gambar D

4. Balok ABCD terjepit sempurna di A (gambar E), dan memikul beban terbagi rata q = 200kg/m' diseluruh

panjang balok serta beban terpusat P = 700 kg di C. Berat balok diabaikan. Lebar balok 15 cm. Tebal balok sepanjang bagian AB 28 cm, sepanjang bagian BC 23 cm dan sepanjang bagian CD 20 cm. Modulus keelastisan balok, $E = 10^5$ kg/cm^2.

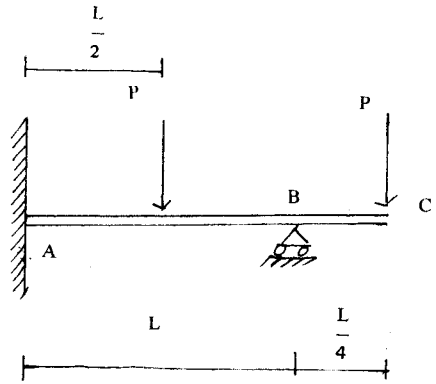
a. Tentukanlah kelandaian dan lendutan balok di D.
b. Tentukan pula kelandaian dan lendutan balok di D jika balok ABCD prismatik dan penampangnya berbentuk setengah lingkaran dengan garis tengah 35 cm.



Gambar E

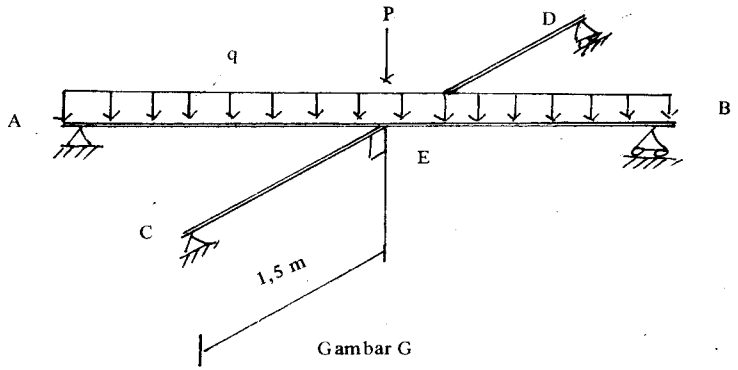
5. Sebuah balok prismatik, panjangnya 450 cm, bertumpu pada sendi A dan rol B. Jarak ujung balok C ke sendi A, 80 cm; Jarak sendi A ke rol B, 300 cm; Jarak rol B ke ujung balok D, 70 cm. Beban terbagi rata q = 300 kg/m'. bekerja di sepanjang balok bagian AB; Beban terpusat P_1 = 2000 kg bekerja pada titik E yang berjarak 80 cm dari titik A; Dan beban terpusat P_2 = 1500 kg bekerja pada ujung balok D. Modulus keelastisan balok, $E = 1{,}5(10^5)$ kg/cm^2; Ukuran penampangnya 25 x 40 cm^2; Dan berat jenisnya, $\gamma = 2{,}4$. Tentukanlah :
   a. Kelandaian balok di A, B, C, D dan E.
   b. Lendutan balok di C dan D.
   c. Lendutan maksimum balok.

6. Tentukan reaksi-reaksi tumpuan bangunan statik tidak tertentu dalam gambar F (Berat balok diabaikan)



Gambar F

7. Sebuah balok prismatik AB bertumpu pada sendi A dan rol B. Di titik E, tengah-tengah balok, balok tersebut bertumpu pada balok prismatik CD yang menyilangnya secara tegak lurus (gambar G). Panjang balok AB 4 meter dan balok CD 3 meter. Balok CD bertumpu pada sendi C dan rol D. Faktor lendutan balok AB, EI_1 = 45 ton m^2 dan balok CD, EI_2 = 60 ton m^2. Tentukanlah reaksi tumpuan masing-masing balok dan lendutannya di titik E jika beban terbagi rata q = 600 kg/m' bekerja pada seluruh panjang balok AB dan beban terpusat P = 1500 kg bekerja di titik E.



Gambar G

BUKU ACUAN

* Beer, F.P. & Johnston, E.R. Jr., 1972, "VEKTOR MECHANICS FOR ENGINEERS : STATICS", McGraw-Hill International Book Company, 2nd Edition.
* Darkov, A. and Kuznetsov, V., 1969, "STRUCTURAL MECHANICS", Mir Publishers, 2nd Editon.
* Feodosyev, V., 1968, "STRENGTH OF MATERIALS", Mir Publishers.
* Leithodl, L., 1976, "THE CALCULUS WITH ANALYTHIC GEOMETRY", 3rd Edition, Harper International Edition.
* Nash, W.A., 1972, "THEORY AND PROBLEMS OF STRENGTH OF MATERIALS", McGraw-Hill Book Company, 2nd Edition.
* Piskunov, N., 1969, "DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS", Mir Publishers.
* Soemono, 1978, "STATIKA I", Penerbit ITB Bandung.
* Soemono, 1980, "TEGANGAN I", Penerbit ITB Bandung.
* Timoshenko, S. & Young, D.H., 1962, "ELEMENTS OF STRENGTH OF MATERIALS", D. van Nostrand Company, Inc., 4th Edition.
* Timoshenko, S. & Young, D.H., 1965, "THEORY OF STRUCTURES", McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 2nd Edition.
* Tuma, J.J., 1969, "THEORY AND PROBLEMS OF STRUCTURAL ANALYSIS", McGraw-Hill Book Company.
* Tung Au, 1965, "ELEMENTARY STRCTURAL MECHANICS", Prentice-Hall of India (private) Ltd.

* Wang, C.K., 1953, "STATICALLY IN DETERMINATE STRUCTURES", McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.
* White, R.N., Gergely, P. and Sexsmith, R.G., 1976, STRUCTURAL ENGINEERING", John Wiley & Sons, Inc., Combined Edition.

***

INDEKS

Angka pembanding Poisson, 50
Balok bersendi dalam, 124
Balok beton bertulang, 124
Balok beton bertulang, 295
Balok gerber, 124
Balok paduan, 286
Bangunan dwimatra, 69
Bangunan statik tertentu, 70
Bangunan statik tidak tertentu, 31
Bangunan tiga sendi, 131
Batang paduan, 18
Batas elastis, 11
Batas luluh, 12
Batas proporsional, 11
Beton bertulang, 295
Bidang netral, 159
Catenary, 202
Derajat kelengkungan, 166
Derajat ketidaktentuan, 359
Diagram gaya aksial, 58
Diagram gaya lintang, 58, 98
Diagram momen lentur, 58, 98
Diagram raga lepas, 79
Diagram tegangan
    akibat momen lentur, 161
    geser, 320
Diagram tegangan-strain, 10
Dilatasi, 62
Ellips inersia, 144
Faktor keamanan, 12
Faktor kekakuan terhadap momen lentur, 266
Garis elastik, 333
Garis netral, 264
Gaya aksial, 1, 4

Gaya dalam, 4, 69
Gaya lintang, 82
Hukum Hooke, 10
Jejari kelengkungan balok, 161
Kabel, 167
    dengan beban terbagi rata sepanjang garis horisontal, 186
    dengan beban terpusat, 167
    parabolik, 188
    yang menanggung beratnya sendiri, 202
Keelastisan, 9
Keadaan seimbang, 299, 307
Komposit, 18, 286
Lendutan balok akibat momen lentur, 331
    cara balok sekawan, 259, 384
    cara bidang momen, 259, 303
    cara perubahan bentuk taat-asas, 259
    cara superposisi, 353
Lenturan murni, 257
Lenturan serong, 181
Modulus keelastisan, 11
Modulus penampang, 267
Momen inersia, 134
    ekstrim, 238
    pribadi, 223
    pribadi utama, 243
Momen lentur, 82
Momen pikul seimbang, 299
Momen sentrifugal, 220
Pelengkung tiga sendi, 159
Penampang ideal, 288
Peralihan titik
    akibat gaya aksial, 23
    akibat perubahan suhu, 27
Perubahan bentuk balok
    akibat gaya aksial, 1, 4
    akibat momen lentur, 331

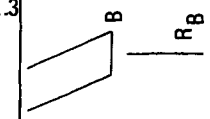
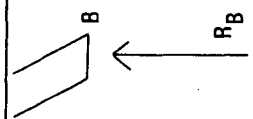
Angka pembandi
Balok bersendi d
Balok beton bert
Balok beton ber
Balok gerber, 12
Balok paduan, 2
Bangunan dwin
Bangunan stati
Bangunan stati
Bangunan tiga
Batang paduar
Batas elastis,
Batas luluh, 1
Batas propor
Beton bertul
Bidang netra
Catenary, 2(
Derajat kele
Derajat ket
Diagram ga
Diagram ga
Diagram n
Diagram r
Diagram 1
akib
gese
Diagram
Dilatasi,
Ellips in
Faktor
Faktor
Garis e
Garis r
Gaya a
Pipa berdinding tipis, 50
Pusat kekakuan, 39
Raga lepas, 76
Sendi, 7, 77
Sendi dalam, 77
Statik tertentu, 70
Statik tidak tertentu, 331
Strain, 10
Sumbu inersia pusat utama, 242
Tegangan
akibat gaya aksial, 1, 4
akibat gaya lintang, 313
akibat momen lentur, 257
tangensial, 52
Tumpuan, 70
jepit, 71
rol, 70
sendi, 71

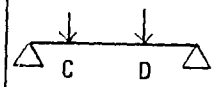
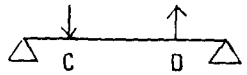
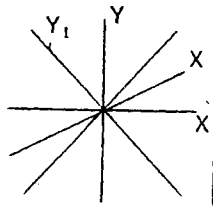
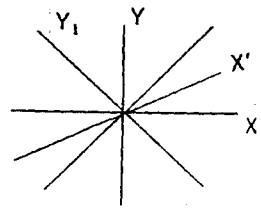
***

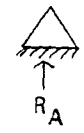
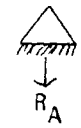
412
Proyek Pembinaan Perpustakaan
Jawa Timur
T. [illegible] 1993 / 1994

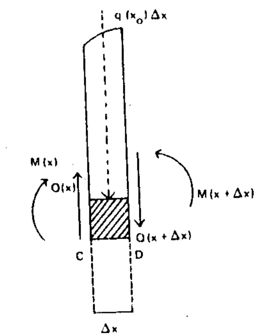
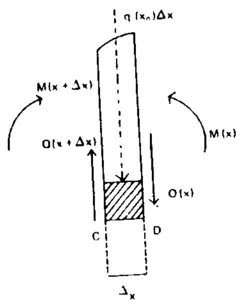
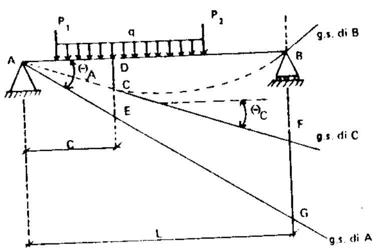
RALAT

BUNGA RAMPAI MEKANIKA TEKNIK

Hal.	ke dari	Tertulis/tercetak	Seharusnya
viii	2 atas	sarana	saran
14	1.3.B.1	Py	Py (y indeks P)
17	4 bawah	1001,5 kg/cm^2	1001,05 kg/cm^2
25	gambar 1.3.F.2	antara titik D dan E	ada titik B
25	gambar 1.3.F.3	δ_E	δ_t
27	4 bawah	q_t	α_t
34	1,2,3 bawah	(1.3.H.3), (1.3.H.4) X + V = 1500 (0,8)	(1.3.I.3), (1.3.I.4) X + Y = 1500 (0,8)
35	1 atas	(1.3.H.3) dan (1.3.H.4)	(1.3.I.3) dan (1.3.I.4)
37	2 atas	a = 150 cm	a = 120 cm
40	9 atas	δ_1 = 3,901	δ_1 = 1,545
51	gambar 1.4.1	tidak bernomor gambar	ada nomor gambar 1.4.1
79	gambar 2.2.A.3		
83	3 atas	kurang kalimat	, dan tanda (–) untuk yang berarah sebaliknya.
	6 atas	kurang kalimat	, dan tanda (–) untuk yang berarah sebaliknya.
104	8 atas	= 0,45 x^2 + ...	= – 0,45 x^2 + ...
113	gambar	tidak bernomor	gambar 2.5.G.1.
113	paling atas	kosong/belum tercetak	Contoh 2.5.F
114	nomor gambar	2.5.F.1	2.5.G.1.

Hal.	Baris ke dari	Tertulis/tercetak	Seharusnya
115	nomor gambar		2.5.G.1
117	gambar 2.5.1.1 (a)		
137	gmb. 2.6.A.4(c)	a(x) = – 1,2 ton	Q(x) = – 1,2 ton
231	5 atas	I_y^* = . . .	I_x^* = . . .
232	Ket. gambar	Z_1 pada meredian $0^0 - 90^0$	Z_2
241	14 atas	α	α_1
	3 bawah	$Im = I_x \sin 2\alpha_1 + ...$	$Im = I_x \sin^2 \alpha_1 + ...$
246	ket. gambar	x 'o	x_o'
		y 'o	y_o'
249	gmb. 4.4. B		
262	ket. gambar	belum tercetak	gambar 5.1.5
	ket. gambar	ya	y_a
269	10 bawah	, jika tegangan . . .	jika diketahui tegangan . .
324	6 bawah	menyelidikan	menyelidiki
339	8 bawah	1/EI ($-Pa^2/2$)	(1/EI) ($-Pa^2/2$)
343	12 bawah	$= \left\| -\frac{5}{384\ EI} qL^4, \right.$	$= \left\| -\frac{5}{384\ EI} qL^4 \right\|$

Hal.	Baris ke dari	Tertulis/tercetak	Seharusnya
349	gmb. 6.1.6.1 (a)		
349	9 bawah	Integralnya	Integralkan
357	1 bawah	gambar 6.2.1.J.2	gambar 6.2.J.2
358	3 bawan	$= \frac{M_A L}{3\ EI}$	$= -\frac{M_A L}{3\ EI}$
365	ket. gambar	Θ_b	Θ_D
370	2 bawah	. . . P, M_a x M_B	. . . P, M_a dan M_B
378	9 bawah	$M = \frac{3\ P\ L}{16}$	$M = -\frac{3\ P\ L}{16}$
380	ket. gambar (c)	E	G
387	13 atas	maka (6.3.3)	maka dari (6.3.3)
395	11 atas	berjarak 2 meter	berjarak 1 meter
402	7 atas	(Mx)	M (x)
408	9 atas	Leithodl	Leithold
	10 atas	LYTHIC	LYTIC
409	1 atas	IN DETERMINATE	INDETERMINATE

Hal.	Gambar	Seharusnya
97	2.5.1.(b)	
99	2.5.2.(b)	
385	6.3.1(a)	

P. yek Pembinaan Perpustakaan
Jawa Timur
T. A. 1993 / 1994